

**YABAR INGENIEROS**

**DISEÑO PRÁCTICO DE CIMENTACIONES SEGÚN ACI 318-25**



**LECTURA 3**

**MÓDULO 03**

**Docente: Ing. Alexis Pompilla Yabar**

**Lima, 4 de enero de 2026**

# Índice

|                                                                  |           |
|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Conceptos básicos de dinámica estructural</b>              | <b>5</b>  |
| 1.1. Vibración libre de SDOF ( <i>Single Degree of Freedom</i> ) | 5         |
| 1.2. Grados de libertad                                          | 5         |
| <b>2. Respuesta de sistemas de varios grados de libertad</b>     | <b>8</b>  |
| 2.1. Ecuación característica                                     | 8         |
| 2.2. Modos de vibración                                          | 9         |
| 2.2.1. Ortogonalidad de modos                                    | 11        |
| 2.2.2. Desacoplamiento modal                                     | 12        |
| 2.3. Respuesta para excitación en la base                        | 13        |
| 2.4. Análisis tiempo–historia                                    | 15        |
| 2.5. Análisis modal espectral                                    | 16        |
| 2.5.1. Criterios de combinación modal                            | 17        |
| <b>3. Ejemplo numérico de aplicación</b>                         | <b>20</b> |
| <b>4. Factores de contribución modal</b>                         | <b>39</b> |
| 4.1. Contribución a la cortante basal y al desplazamiento        | 42        |
| 4.2. Contribución al momento volcantes en la base                | 45        |



## Índice de figuras

|     |                                                                                                                  |    |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.  | Diferencia entre un grado de libertad estático y dinámico. (Fuente: Chopra, 2014) . . . . .                      | 6  |
| 2.  | Diferencia entre un problema estático y dinámico. (Fuente: Clough y Joseph, 2003) . . . . .                      | 6  |
| 3.  | Reduccion de grados de libertad. (Fuente: Clough y Joseph, 2003) . . . . .                                       | 6  |
| 4.  | Fuente: Clough y Joseph, 2003 . . . . .                                                                          | 7  |
| 5.  | Vibración de un pórticos de 2 niveles con condiciones iniciales arbitrarias (Fuente: Chopra, 2014) . . . . .     | 9  |
| 6.  | Vibración libre debido a las condiciones iniciales del modo 1 (Fuente: Chopra, 2014) . . . . .                   | 10 |
| 7.  | Vibración libre debido a las condiciones iniciales del modo 2 (Fuente: Chopra, 2014) . . . . .                   | 10 |
| 8.  | SDOF sometido excitación en la base. (Fuente: Chopra, 2014) . . . . .                                            | 13 |
| 9.  | Valores máximos de cada coordenada modal en diferentes instantes de tiempo. (Fuente: García, 1988) . . . . .     | 17 |
| 10. | Coeficientes de correlación en el método CQC (Fuente: García, 1988) . . . . .                                    | 19 |
| 11. | Resumen del procedimiento de análisis modal espectral (Fuente: Pique Del Pozo y Scaletti Farina, 1990) . . . . . | 19 |
| 12. | Geometría del pórtico analizado. . . . .                                                                         | 20 |
| 13. | Formas modales normalizadas al piso 4. . . . .                                                                   | 24 |
| 14. | Registro LIMA 1974 EW sin corregir: aceleración, velocidad y desplazamiento. . . . .                             | 26 |
| 15. | Registro LIMA 1974 EW corregido: aceleración, velocidad y desplazamiento. . . . .                                | 27 |
| 16. | Coordenadas modales de desplazamiento $q_r(t)$ en el tiempo. . . . .                                             | 28 |
| 17. | Coordenadas modales de aceleración $\ddot{q}_r(t)$ en el tiempo. . . . .                                         | 28 |
| 18. | Desplazamientos relativos por piso en el tiempo (análisis tiempo–historia). . . . .                              | 29 |
| 19. | Aceleraciones absolutas por piso en el tiempo (análisis tiempo–historia). . . . .                                | 29 |
| 20. | Derivas de entrepiso en el tiempo. . . . .                                                                       | 30 |
| 21. | Fuerzas laterales en cada piso en el tiempo. . . . .                                                             | 30 |
| 22. | Cortante basal y momento de volteo en el tiempo. . . . .                                                         | 31 |
| 23. | Espectros de desplazamiento y aceleración para LIMA 1974 EW y puntos en los períodos modales. . . . .            | 32 |
| 24. | Perfiles CQC en altura de desplazamientos relativos, derivas y aceleraciones. . . . .                            | 34 |
| 25. | Comparación en altura de desplazamientos máximos TH vs CQC. . . . .                                              | 35 |
| 26. | Comparación en altura de derivas máximas TH vs CQC. . . . .                                                      | 36 |
| 27. | Comparación en altura de aceleraciones máximas TH vs CQC. . . . .                                                | 37 |
| 28. | Comparación de cortantes máximas de entrepiso TH vs CQC. . . . .                                                 | 38 |
| 29. | Comparación del diagrama de momento volcamiento TH vs CQC. . . . .                                               | 39 |
| 30. | Factor de contribución modal. Fuente: Chopra, 2014 . . . . .                                                     | 41 |
| 31. | Contribución estática de fuerzas laterales en cada modo. (Fuente: Chopra, 2014) . . . . .                        | 43 |
| 32. | Cortante y momento debido a las fuerzas laterales de cada modo (Fuente: Chopra, 2014) . . . . .                  | 46 |

|                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 33. Definición de la altura modal. Fuente: Chopra, 2014. . . . .                                | 46 |
| 34. Ejemplo de calculo de contribución modal al momento volcante. Fuente: Chopra, 2014. . . . . | 47 |



## Lista de tablas

|    |                                                                               |    |
|----|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. | Resumen de propiedades modales generalizadas y participación de masa. . . . . | 25 |
| 2. | Respuesta máxima en el tiempo (LIMA 1974 EW). . . . .                         | 31 |
| 3. | Respuestas espectrales en los períodos modales (LIMA 1974 EW). . . . .        | 33 |
| 4. | Respuesta máxima modal-espectral (CQC) por piso. . . . .                      | 34 |
| 5. | Comparación de desplazamientos máximos TH vs CQC. . . . .                     | 35 |
| 6. | Comparación de derivas máximas TH vs CQC. . . . .                             | 36 |
| 7. | Comparación de aceleraciones absolutas máximas TH vs CQC. . . . .             | 37 |
| 8. | Contribución modal algebraica al momento volcante en la base . . . . .        | 47 |



# 1. Conceptos básicos de dinámica estructural

## 1.1. Vibración libre de SDOF (*Single Degree of Freedom*)

### Solución al problema de vibración libre (SDOF)

La ecuación diferencial que rige la vibración libre del sistema con masa  $m$  y rigidez  $k$  sin amortiguamiento es:

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (1)$$

Con las condiciones iniciales  $u = u(0)$ ,  $\dot{u} = \dot{u}(0)$ . La solución de la ecuación diferencial homogénea es:

$$u(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t \quad (2)$$

Donde:  $A = u(0)$ ,  $B = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}$  y  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ .

## 1.2. Grados de libertad

### Definición de grado de libertad

*Un grado de libertad corresponde a cualquier movimiento posible de los nodos de los elementos en una dirección no restringida.*

*Es definido como el número de **desplazamientos independientes** requerido para definir las posiciones desplazadas de todas las masas relativas a sus posiciones originales.*

### Diferencia entre un grado de libertad dinámico y estático

En la figura 1, los grados de libertad **estáticos** del pórtico de un nivel, asumiendo un diafragma rígido, son  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ . No obstante, al considerar que la masa está concentrada en el primer nivel —ya que la masa del entrepiso suele ser mucho mayor que la asociada al peso propio de las columnas— y bajo una excitación dinámica  $p(t)$ , el único grado de libertad relevante es el desplazamiento lateral  $u$ , al cual se denomina **grado de libertad dinámico**. Esto no implica la eliminación de los grados de libertad rotacionales  $u_2$  y  $u_3$ , sino su incorporación implícita mediante un proceso conocido como *condensación estática*.

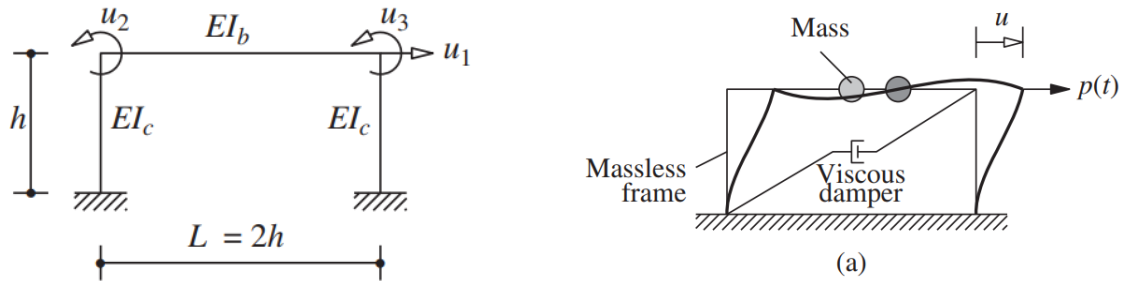


Figura 1: Diferencia entre un grado de libertad estático y dinámico. (Fuente: Chopra, 2014)

### Ejemplo de una viga continua:

En un sistema continuo bajo carga dinámica, las fuerzas de inercia dependen de desplazamientos y aceleraciones que varían en el espacio y en el tiempo, por lo que la respuesta debe definirse en cada punto de la estructura (Fig. 2). Para simplificar el análisis, se idealiza la masa como concentrada en un número finito de puntos (Fig. 3); así, las fuerzas de inercia se desarrollan solo en esos puntos y la respuesta queda descrita mediante un conjunto finito de desplazamientos. El número mínimo de desplazamientos independientes necesarios para representar los efectos inerciales significativos se denomina **número de grados de libertad dinámicos** del sistema.

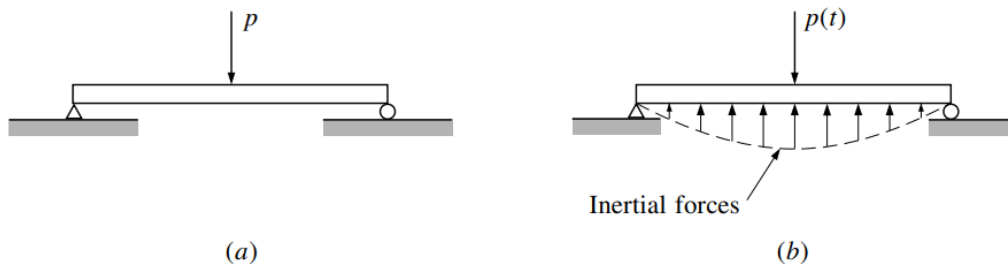


Figura 2: Diferencia entre un problema estático y dinámico. (Fuente: Clough y Joseph, 2003)

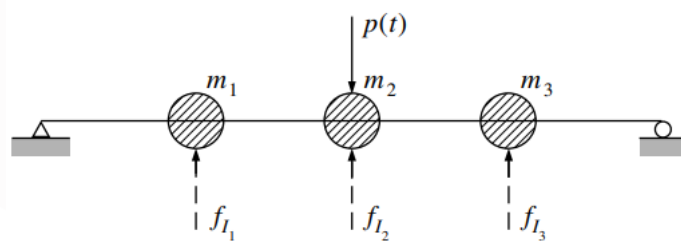


Figura 3: Reduccion de grados de libertad. (Fuente: Clough y Joseph, 2003)

### Ejemplo de una viga continua (cont.):

El procedimiento de reducir los grados de libertad se basa en la suposición de que la deflexión puede expresarse como la suma de una serie trigonométrica de ondas sinusoidales independientes que satisfacen las condiciones de borde,

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

donde los coeficientes  $b_n$  son constantes y cuantifican la contribución de cada patrón a la deformada total. En el caso dinámico, la estructura ya no responde a una carga constante, sino a una excitación dependiente del tiempo. En esta situación, **los patrones espaciales de deformación permanecen invariantes**, pero sus amplitudes evolucionan con el tiempo y *dependen de la carga aplicada*. Por ello, los coeficientes estáticos  $b_n$  se reemplazan por funciones temporales  $q_n(t)$ , dando lugar a

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t)$$

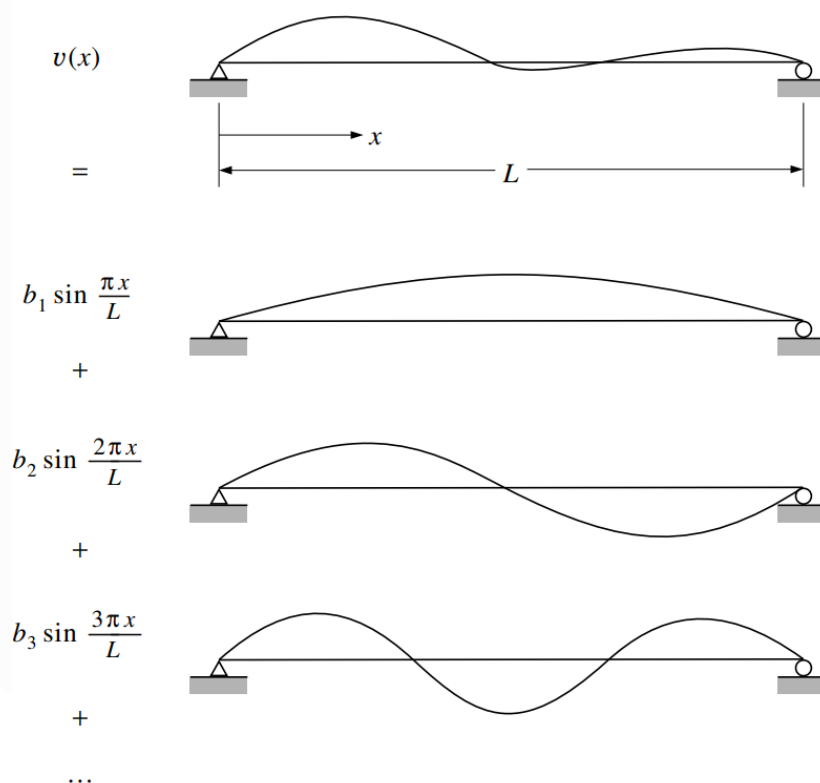


Figura 4: Fuente: Clough y Joseph, 2003



## 2. Respuesta de sistemas de varios grados de libertad

### 2.1. Ecuación característica

#### Ecuación característica en sistemas de varios grados de libertad

Para un sistema lineal de varios grados de libertad en vibración libre no amortiguada con las matrices de masa y rigidez  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{K}$ , la ecuación de equilibrio dinámico se escribe como

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

Sabemos que la solución de vibración libre para un sistema de un grado de libertad esta dado por:

$$q(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$$

Sin embargo ahora  $\omega_n$  no sera única pues tenemos mas de un grado de libertad. Definiendo un vector  $\phi$  que representa el movimiento relativo que tienen los grados de libertad entres si, el movimiento del sistema se puede representar para una frecuencia en particular  $\omega_{nm}$ :

$$u_m(t) = q_m(t) \phi_m \quad q_m(t) = A_m \cos(\omega_{nm} t) + B_m \sin(\omega_{nm} t) \quad (4)$$

Si derivamos 2 veces la ecuación 4 obtenemos la velocidad y aceleración para el modo  $m$ :

$$\dot{u}_m(t) = [-A_m \omega_{nm} \sin(\omega_{nm} t) + B_m \omega_{nm} \cos(\omega_{nm} t)] \phi_m$$

$$\ddot{u}_m(t) = [-A_m \omega_{nm}^2 \cos(\omega_{nm} t) - B_m \omega_{nm}^2 \sin(\omega_{nm} t)] \phi_m$$

$$\ddot{u}_m(t) = -\omega_{nm}^2 (q_m(t)) \phi_m$$

Reemplazando la aceleración y el desplazamiento en 3 nos queda:

$$\mathbf{M} \cdot (-\omega_{nm}^2 q_m(t) \phi_m) + \mathbf{K} \cdot (q_m(t) \phi_m) = 0 \rightarrow (\mathbf{K} - \omega_{nm}^2 \mathbf{M}) \phi_m = 0$$

Para que exista una solución no trivial, el sistema de ecuaciones algebraicas debe ser singular, lo que conduce a la condición

$$\det(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) = 0,$$

denominada **ecuación característica**. Su resolución permite determinar las frecuencias naturales  $\omega_n$  (valores propios) y las correspondientes formas modales  $\phi_n$  (vectores propios), que describen los patrones independientes de vibración del sistema.

## 2.2. Modos de vibración

### Significado físico de las formas modales

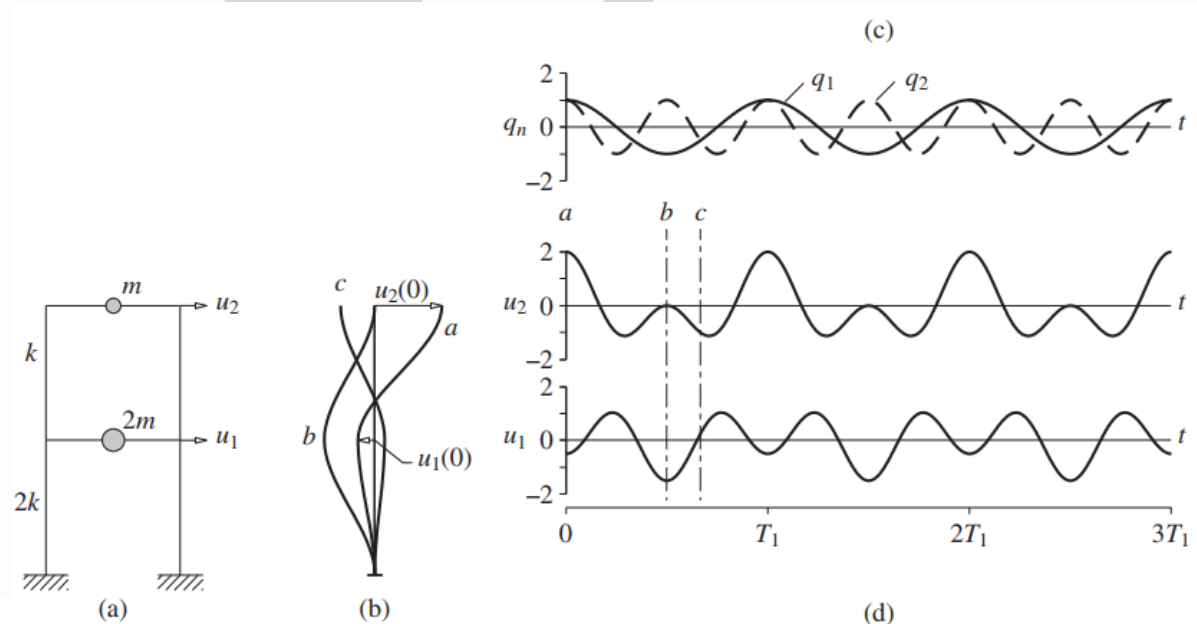
El significado físico de las formas modales se comprende al analizar la vibración libre de un sistema de varios grados de libertad. Si el vector de desplazamientos iniciales

$$\phi = \{u_1(0), u_2(0)\}^T$$

es arbitrario, los distintos grados de libertad no se mueven en fase, por lo que la respuesta del sistema no es periódica y no puede asociarse a un único período de vibración.

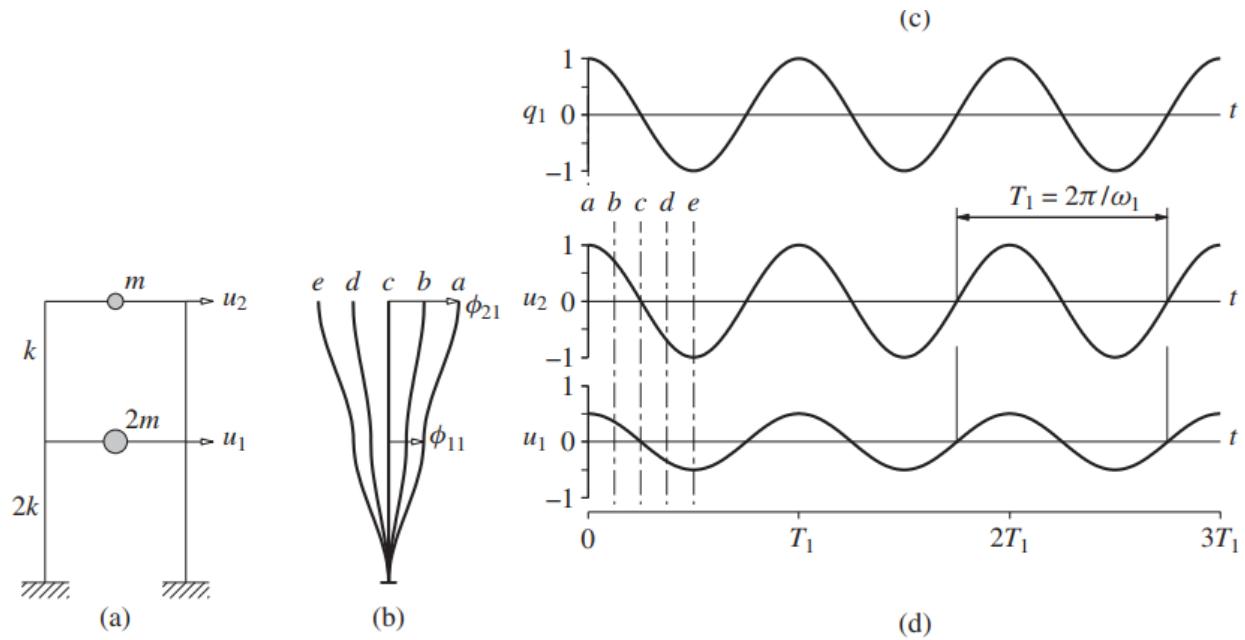
En contraste, cuando el vector inicial coincide con una forma especial  $\phi_n$ , todos los grados de libertad vibran en fase y mantienen proporciones constantes entre sus desplazamientos. En este caso, el movimiento es armónico simple y puede asociarse a un período natural bien definido  $T_n$ .

Estas formas especiales corresponden a los **modos de vibración** del sistema y se obtienen como soluciones del problema característico. Cada modo describe un patrón independiente de movimiento y está asociado a una frecuencia natural única.



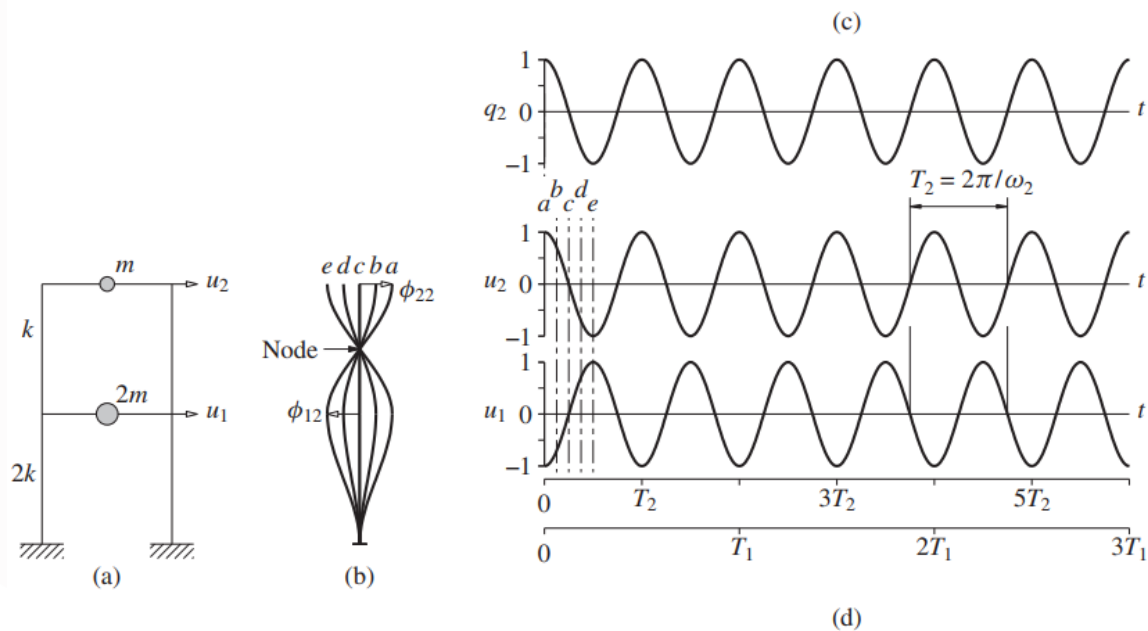
**Figure 10.1.1** Free vibration of an undamped system due to arbitrary initial displacement:  
 (a) two-story frame; (b) deflected shapes at time instants  $a$ ,  $b$ , and  $c$ ; (c) modal coordinates  $q_n(t)$ ;  
 (d) displacement history.

Figura 5: Vibración de un pórticos de 2 niveles con condiciones iniciales arbitrarias (Fuente: Chopra, 2014)



**Figure 10.1.2** Free vibration of an undamped system in its first natural mode of vibration: (a) two-story frame; (b) deflected shapes at time instants  $a, b, c, d$ , and  $e$ ; (c) modal coordinate  $q_1(t)$ ; (d) displacement history.

Figura 6: Vibración libre debido a las condiciones iniciales del modo 1 (Fuente: Chopra, 2014)



**Figure 10.1.3** Free vibration of an undamped system in its second natural mode of vibration: (a) two-story frame; (b) deflected shapes at the time instants  $a, b, c, d$ , and  $e$ ; (c) modal coordinate  $q_2(t)$ ; (d) displacement history.

Figura 7: Vibración libre debido a las condiciones iniciales del modo 2 (Fuente: Chopra, 2014)

### 2.2.1. Ortogonalidad de modos

#### Ortogonalidad modal

Recordando la ecuación característica:

$$(\mathbf{K} - \omega_{nm}^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_m = \mathbf{0}$$

Para un modo cualquiera  $n$ , cada valor y vector característico satisface:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n \quad (5)$$

Premultiplicando la ecuación anterior por la transpuesta de la forma modal  $r$  se obtiene:

$$\boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n$$

Tomando la transpuesta de ambos lados y usando  $(AB)^T = B^T A^T$ , resulta:

$$\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_r = \omega_n^2 \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_r$$

Ahora, premultiplicando la ecuación característica correspondiente al modo  $r$  por la transpuesta de la forma modal  $n$  se obtiene:

$$\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_r = \omega_r^2 \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_r$$

De las ecuaciones (2.2.1) y (2.2.1) se deriva:

$$(\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_r) (\omega_n^2 - \omega_r^2) = 0$$

Para la mayoría de aplicaciones prácticas se cumple que  $\omega_n \neq \omega_r$ , por lo que:

$$\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_r = 0$$

Reemplazando en (2.2.1), se obtiene:

$$\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_r = 0$$

Las dos últimas expresiones representan las condiciones de **ortogonalidad modal** que satisfacen los modos naturales cuando  $\omega_n \neq \omega_r$ .

### 2.2.2. Desacoplamiento modal

#### Desacoplamiento modal

La ecuación de movimiento de un sistema de varios grados de libertad con amortiguamiento, sometido a una carga variable en el tiempo  $p(t)$ , se escribe como

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}(t).$$

El vector de desplazamientos puede expresarse como una combinación lineal de las formas modales  $\phi_n$ , invariantes en el tiempo, y las coordenadas modales  $q_n(t)$ ,

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n q_n(t).$$

De forma análoga, la carga externa puede escribirse como  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{F} f(t)$ , donde  $\mathbf{F}$  es un vector espacial constante. Sustituyendo en la ecuación de movimiento se obtiene

$$\mathbf{M} \sum_{n=1}^N \phi_n \ddot{q}_n(t) + \mathbf{C} \sum_{n=1}^N \phi_n \dot{q}_n(t) + \mathbf{K} \sum_{n=1}^N \phi_n q_n(t) = \mathbf{F} f(t).$$

Premultiplicando la expresión anterior por la transpuesta de una forma modal  $\phi_i^T$  se obtiene

$$\sum_{n=1}^N \phi_i^T \mathbf{M} \phi_n \ddot{q}_n(t) + \sum_{n=1}^N \phi_i^T \mathbf{C} \phi_n \dot{q}_n(t) + \sum_{n=1}^N \phi_i^T \mathbf{K} \phi_n q_n(t) = \phi_i^T \mathbf{F} f(t).$$

Aplicando las propiedades de ortogonalidad modal, la ecuación se reduce a

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i \ddot{q}_i(t) + \phi_i^T \mathbf{C} \phi_i \dot{q}_i(t) + \phi_i^T \mathbf{K} \phi_i q_i(t) = \phi_i^T \mathbf{F} f(t).$$

Definiendo las magnitudes modales

$$M_i^* = \phi_i^T \mathbf{M} \phi_i, \quad C_i^* = \phi_i^T \mathbf{C} \phi_i, \quad K_i^* = \phi_i^T \mathbf{K} \phi_i,$$

la ecuación desacoplada queda como

$$M_i^* \ddot{q}_i(t) + C_i^* \dot{q}_i(t) + K_i^* q_i(t) = P_i^*(t), \quad P_i^*(t) = \phi_i^T \mathbf{F} f(t)$$

El desacoplamiento completo se logra si la matriz de amortiguamiento corresponde a un *amortiguamiento clásico*, en cuyo caso las ecuaciones modales son independientes.

## 2.3. Respuesta para excitación en la base

### Ecuación de movimiento de un SDOF con excitación en la base

Para un sistema de un grado de libertad (SDOF) sometido a excitación sísmica en la base, el movimiento total de la masa puede descomponerse como la suma del desplazamiento relativo de la estructura respecto al suelo  $u(t)$  y el desplazamiento del terreno  $u_g(t)$ . En consecuencia, la aceleración absoluta de la masa es

$$\ddot{u}_{\text{abs}}(t) = \ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t).$$

Aplicando el equilibrio dinámico (segunda ley de Newton), la suma de las fuerzas de inercia, amortiguamiento y rigidez debe ser nula. Esto conduce a la ecuación

$$m(\ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t)) + c\dot{u}(t) + k u(t) = 0,$$

que puede reescribirse en términos del desplazamiento relativo como

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = -m \ddot{u}_g(t).$$

Esta expresión muestra que la excitación sísmica en la base es equivalente a una **fuerza inercial efectiva**  $-m \ddot{u}_g(t)$  aplicada al sistema. La respuesta estructural se evalúa resolviendo esta ecuación para el desplazamiento relativo  $u(t)$ , a partir del cual se obtienen las fuerzas internas y la aceleración absoluta de la masa.

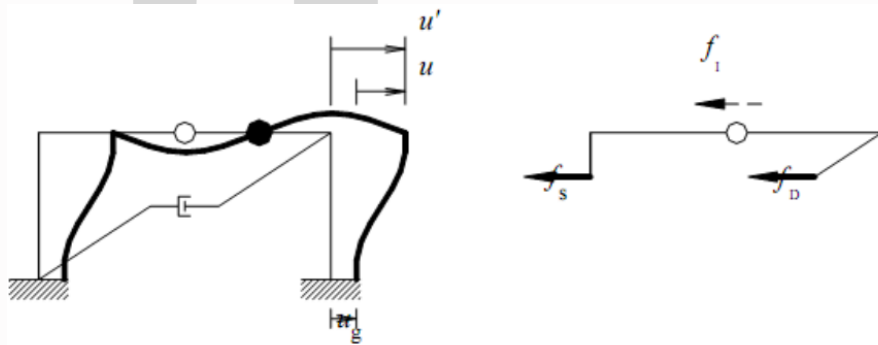


Figura 8: SDOF sometido excitación en la base. (Fuente: Chopra, 2014)

### Respuesta para excitación en la base de un sistema de varios grados de libertad

Dividiendo entre la masa modal  $M_i^*$ , cada ecuación modal adopta la forma

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2q_i(t) = \frac{\phi_i^T \mathbf{F} f(t)}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i}.$$

Para el caso de excitación en la base, la ecuación de movimiento modal se escribe como

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2q_i(t) = -\frac{\phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{r} a_s(t)}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i} = -\Gamma_i a_s(t),$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector de influencia sísmica y  $\Gamma_i$  es el **coeficiente de participación modal** definido como

$$\Gamma_i = \frac{\phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{r}}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i}.$$

Para un sistema plano de  $n$  grados de libertad, el vector de excitación suele definirse como

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Introduciendo el cambio de variable

$$q_i(t) = \Gamma_i D_i(t),$$

donde  $D_i(t)$  es el **desplazamiento modal generalizado**, la ecuación de movimiento se reduce a

$$\ddot{D}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{D}_i(t) + \omega_i^2D_i(t) = -a_s(t).$$



## 2.4. Análisis tiempo–historia

### Análisis tiempo–historia lineal en sistemas de varios grados de libertad (superposición modal)

En un análisis tiempo–historia lineal, la ecuación de movimiento del sistema se expresa como

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}(t),$$

y se transforma a coordenadas modales usando  $\mathbf{u}(t) = \Phi \mathbf{q}(t)$ . Si el amortiguamiento es *clásico*, el sistema se **desacopla** en  $N$  ecuaciones escalares independientes:

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = P_i(t).$$

Para excitación en la base, la fuerza modal puede escribirse como  $P_i(t) = -\Gamma_i a_s(t)$ , y es conveniente resolver en el **sistema equivalente**  $D_i(t)$  definido por

$$q_i(t) = \Gamma_i D_i(t),$$

con lo cual cada modo queda con **masa unitaria**:

$$\ddot{D}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{D}_i(t) + \omega_i^2 D_i(t) = -a_s(t).$$

Cada ecuación desacoplada se resuelve numéricamente en el tiempo (por ejemplo, mediante el método de *Newmark-β*), obteniendo  $D_i(t)$ ; luego se recupera la coordenada modal como  $q_i(t) = \Gamma_i D_i(t)$ . Finalmente, la respuesta total de la estructura se obtiene aplicando el **principio de superposición modal**:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^m \phi_i q_i(t) = \sum_{i=1}^m \phi_i \Gamma_i D_i(t),$$

donde  $m$  es el número de modos considerados (según el criterio de masa participante o precisión requerida).



## 2.5. Análisis modal espectral

### Análisis modal espectral

Para excitación sísmica en la base, la ecuación de movimiento asociada al modo  $i$  se escribe como

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2q_i(t) = -\Gamma_i a_s(t),$$

La respuesta total de la estructura se obtiene mediante la superposición modal,

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\phi}_n q_n(t), \quad q_n(t) = \Gamma_n D_n(t),$$

por lo que la contribución modal al desplazamiento queda como

$$\mathbf{u}_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n \Gamma_n D_n(t), \quad \mathbf{u}_{n,\text{máx}} = \boldsymbol{\phi}_n \Gamma_n D_{n,\text{máx}}.$$

La función  $D_n(t)$  corresponde a la respuesta de un **sistema equivalente de un grado de libertad con masa unitaria** y período igual al del modo  $n$ , gobernado por

$$\ddot{D}_n(t) + 2\xi_n\omega_n\dot{D}_n(t) + \omega_n^2D_n(t) = -a_s(t).$$

La respuesta máxima  $D_{n,\text{máx}}$  puede obtenerse directamente del **espectro de respuesta** asociado al acelerograma  $a_s(t)$ , o del **espectro de diseño** que incorpora los efectos de sitio, lo cual es equivalente a emplear el espectro normativo.

*Una vez obtenida la respuesta máxima de cada modo a partir del espectro, ¿cómo se combinan estas contribuciones modales para estimar la respuesta máxima global de la estructura?*



### 2.5.1. Criterios de combinación modal

#### Criterios de combinación modal

Los valores máximos de la respuesta modal no pueden sumarse directamente, ya que, en general, los máximos de cada modo **no ocurren simultáneamente en el tiempo** como se muestra en la figura 9. Cuando un modo alcanza su máximo, las respuestas de los demás modos suelen ser menores que sus máximos individuales. Por esta razón, se emplean **métodos de combinación modal** para estimar la respuesta máxima global.

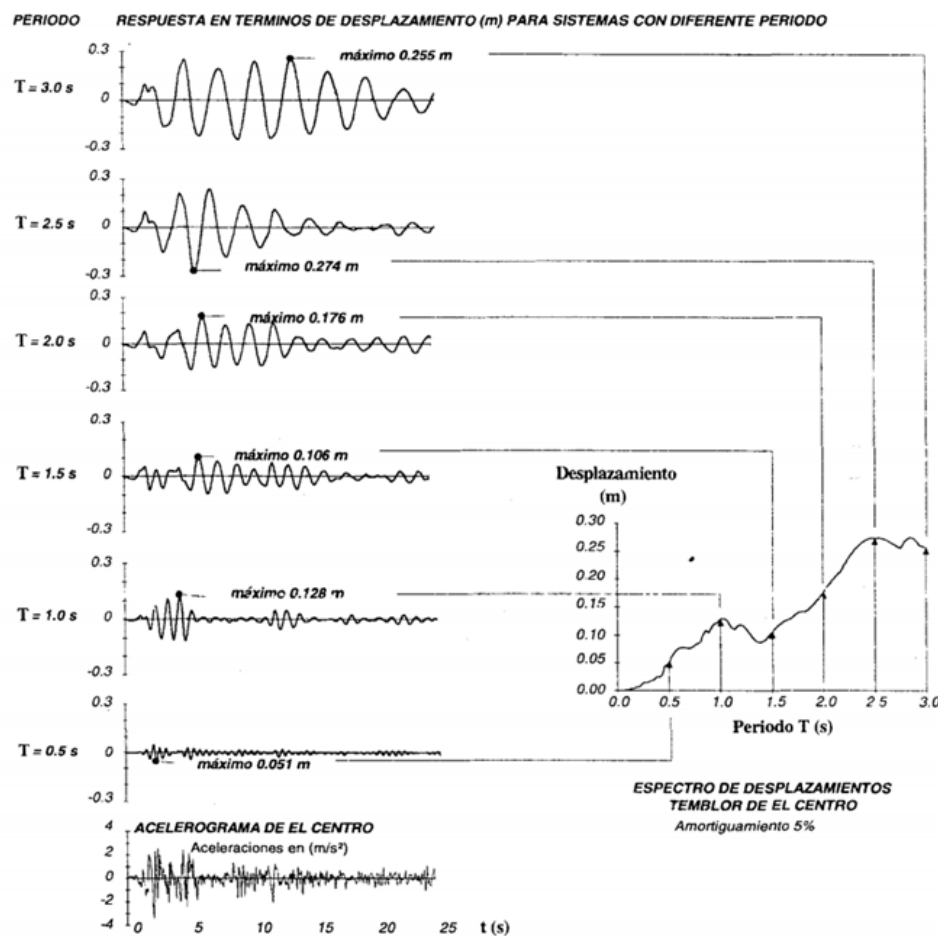


Figura 15-1 - Cálculo del espectro de respuesta de desplazamientos del Temblor de El Centro. Debe observarse que los valores que se coleccionan en el espectro no ocurren en el mismo instante

Figura 9: Valores máximos de cada coordenada modal en diferentes instantes de tiempo. (Fuente: García, 1988)

### Criterios de combinación modal (Cont.)

A continuación se presentan los métodos de combinación mas conocidos para estimar la respuesta máxima.

**Suma de los valores absolutos (ABS)** Puede interpretarse como un **límite superior conservador** de la respuesta:

$$\bar{r} \leq \sum_{i=1}^m |r_i|.$$

**Raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (SRSS)** Basado en la teoría de vibraciones aleatorias y en supuestos estadísticos de independencia modal, es adecuado cuando las frecuencias naturales están bien separadas:

$$\bar{r} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^m r_i^2}.$$

**Combinación cuadrática completa (CQC)** Este método considera la **correlación entre modos**, lo cual es fundamental cuando existen frecuencias cercanas. A diferencia del método SRSS, el método CQC reconoce el **signo relativo** de las contribuciones modales, reduciendo errores cuando hay interacción modal significativa (Wilson):

$$\bar{r} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m r_i r_j \rho_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m r_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \sum_{j=1}^m r_i r_j \rho_{ij}}.$$

El coeficiente de correlación modal, para el caso de amortiguamiento igual en todos los modos, se expresa como

$$\rho_{ij} = \frac{8\beta^2(1 + \lambda_{ij})\lambda_{ij}^{3/2}}{(1 - \lambda_{ij}^2)^2 + 4\beta^2\lambda_{ij}(1 + \lambda_{ij}^2)^2}, \quad \lambda_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j},$$

donde  $\beta$  es la fracción de amortiguamiento crítico (usualmente  $\beta = 0,05$ ) y  $\omega_i, \omega_j$  son las frecuencias angulares de los modos  $i$  y  $j$ .

De forma más general, cuando los amortiguamientos modales son diferentes, el coeficiente de correlación propuesto por Der Kiureghian se escribe como

$$\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{\beta_i\beta_j}(\beta_i + \lambda_{ij}\beta_j)\lambda_{ij}^{3/2}}{(1 - \lambda_{ij}^2)^2 + 4\beta_i\beta_j\lambda_{ij}(1 + \lambda_{ij}^2) + 4(\beta_i^2 + \beta_j^2)\lambda_{ij}^2}.$$

Finalmente, como señala Chopra, el análisis modal espectral **no proporciona una predicción exacta** de la respuesta máxima en el tiempo, sino una **estimación confiable y suficientemente precisa** para propósitos de diseño estructural.

Pique y Scaletti enfatizan que *la combinación es la ultima operación que se realiza para obtener cualquier efecto*.

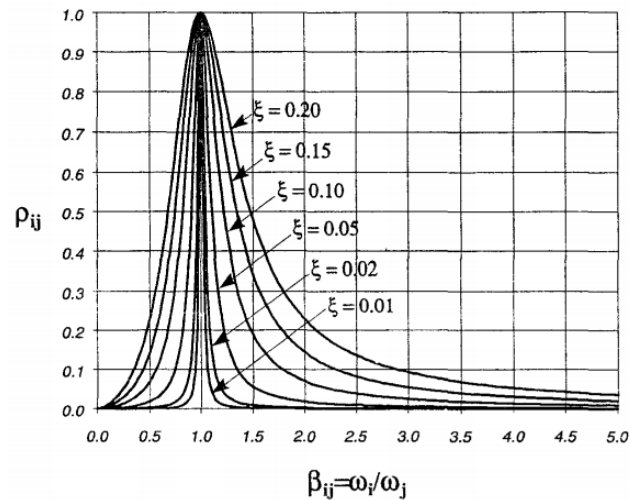


Figura 10: Coeficientes de correlación en el método CQC (Fuente: García, 1988)

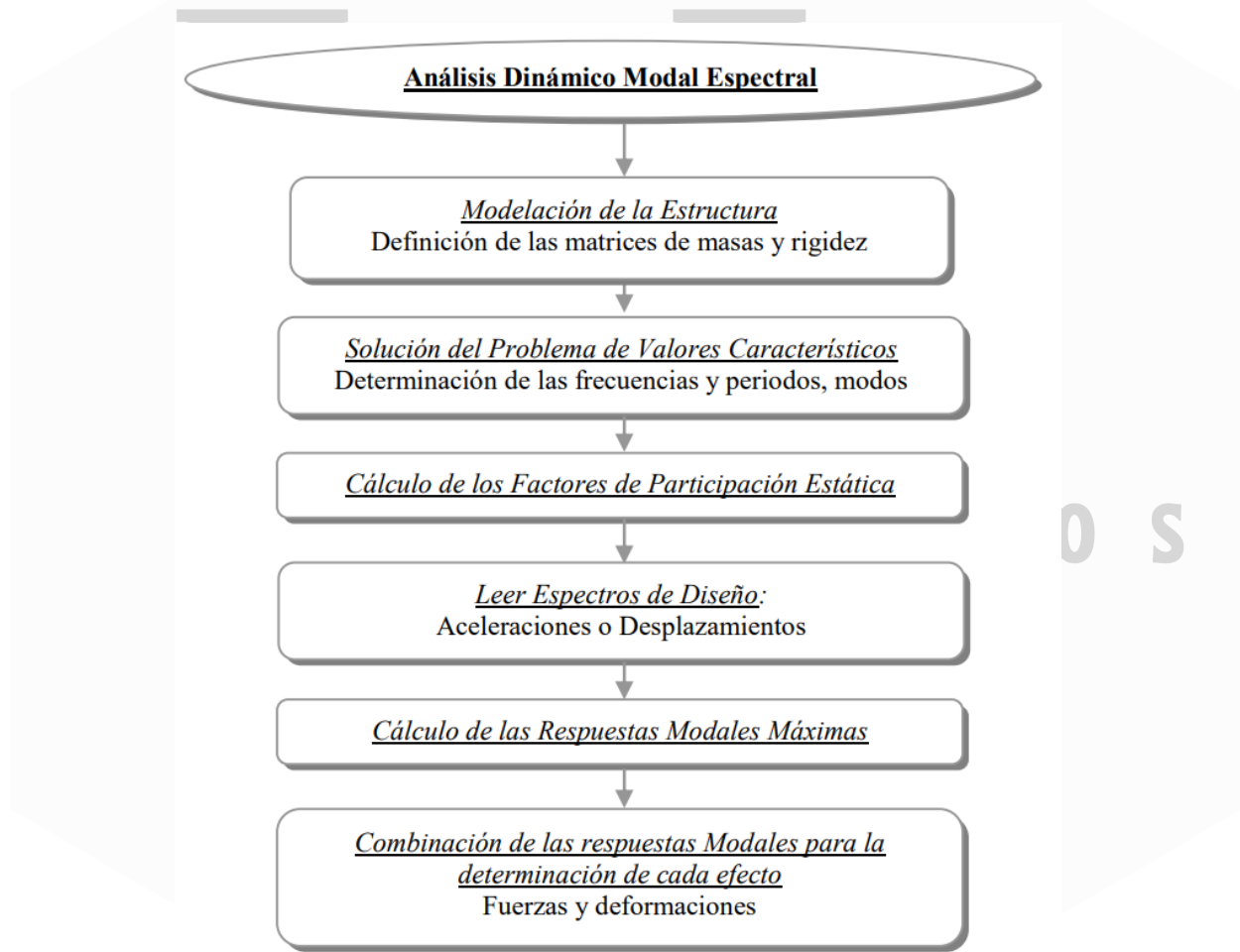


Figura 11: Resumen del procedimiento de análisis modal espectral (Fuente: Pique Del Pozo y Scaletti Farina, 1990)

### 3. Ejemplo numérico de aplicación

#### Ejemplo de un edificio de 5 niveles:

Un edificio aporticado de concreto armado ( $E_c = 2,2 \times 10^6 \text{ tonf/m}^2$ ) está compuesto de 5 pórticos iguales (ver Figura 12) con columnas y vigas de dimensiones  $0.3\text{m} \times 0.60\text{m}$ . Asumiendo pesos por nivel de 600 tonf, realice el análisis modal espectral y el análisis tiempo historia para el sismo de Lima 1974 EW. Asuma una razón de amortiguamiento para todos los modos de 5 %.

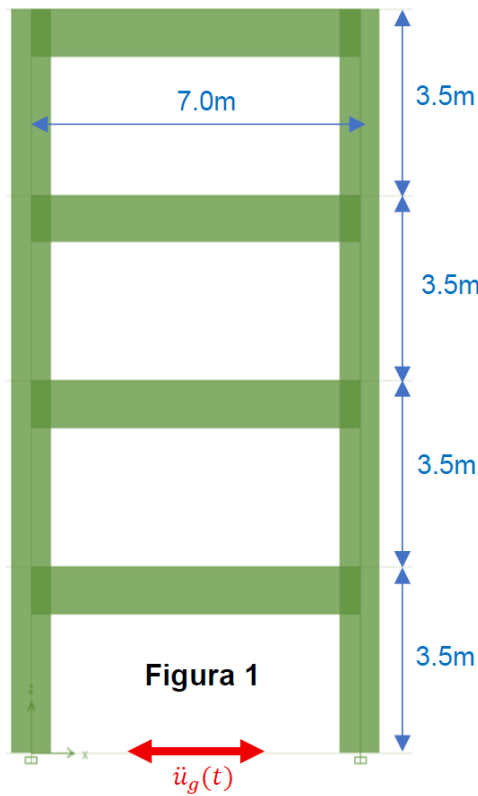


Figura 12: Geometría del pórtico analizado.

## Ejemplo de un edificio de 5 niveles (Solución):

## a) Matriz de rigidez y masa:

La matriz de rigidez lateral del pórtico de 4 pisos, empleada en el presente trabajo, se obtuvo mediante el *método de la rigidez* aplicado al pórtico bidimensional completo y posteriormente reducida por medio de *condensación estática* a un solo grado de libertad por piso (desplazamiento horizontal del diafragma en cada nivel).

En primer lugar, se modeló cada elemento columna como una viga–columna tipo Timoshenko, incluyendo deformaciones por corte. Las vigas se consideraron axialmente inextensibles, lo que en términos estructurales equivale a suponer un *diafragma rígido* en cada piso: todos los nudos del mismo nivel comparten el mismo desplazamiento horizontal. Con esta hipótesis, los grados de libertad axiales de vigas no contribuyen a la deformación lateral global.

El ensamblaje de las matrices de rigidez de los elementos en coordenadas globales produce la matriz de rigidez global completa del pórtico, definida en términos de todos los grados de libertad nodales (desplazamientos horizontales y verticales, y giros). A partir de ella se realiza una partición en los grados de libertad *maestros* asociados a los desplazamientos laterales de los diafragmas de piso,  $\mathbf{u}_g$ , y los grados de libertad *esclavos* internos,  $\mathbf{u}_c$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_g \\ \mathbf{F}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{gg} & \mathbf{K}_{gc} \\ \mathbf{K}_{cg} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_g \\ \mathbf{u}_c \end{bmatrix}.$$

Imponiendo equilibrio interno sin cargas aplicadas en los grados de libertad esclavos ( $\mathbf{F}_c = \mathbf{0}$ ), se obtiene la ecuación de condensación estática:

$$\mathbf{u}_c = -\mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{K}_{cg} \mathbf{u}_g.$$

Al reemplazar esta expresión en la primera fila del sistema, se obtiene la matriz de rigidez condensada en los grados de libertad maestros:

$$\mathbf{F}_g = \left( \mathbf{K}_{gg} - \mathbf{K}_{gc} \mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{K}_{cg} \right) \mathbf{u}_g \equiv \mathbf{K}_{\text{lat}} \mathbf{u}_g,$$

donde  $\mathbf{K}_{\text{lat}}$  es la *matriz de rigidez lateral* de tamaño  $4 \times 4$  asociada al modelo de corte del pórtico de 4 pisos.

## Ejemplo de un edificio de 5 niveles (Solución):

Matriz de rigidez lateral de un pórtico:

$$K_{\text{lateral}} = \begin{bmatrix} 10537,817 & -6118,894 & 1637,5 & -213,823 \\ -6118,894 & 8943,099 & -5700,356 & 1257,663 \\ 1637,5 & -5700,356 & 8034,083 & -3693,048 \\ -213,823 & 1257,663 & -3693,048 & 2606,82 \end{bmatrix} \left[ \frac{\text{tonf}}{m} \right]$$

Dado que la estructura esta compuesta por 5 pórticos iguales la matriz de rigidez lateral de la estructura sera la rigidez del pórtico multiplicado por 5:

Matriz de rigidez lateral de la estructura:

$$K = \begin{bmatrix} 52689,083 & -30594,469 & 8187,502 & -1069,114 \\ -30594,469 & 44715,496 & -28501,779 & 6288,315 \\ 8187,502 & -28501,779 & 40170,415 & -18465,241 \\ -1069,114 & 6288,315 & -18465,241 & 13034,101 \end{bmatrix} \left[ \frac{\text{tonf}}{m} \right]$$

Matriz de masas:

$$M = \begin{bmatrix} 61,183 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 61,183 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 61,183 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 61,183 \end{bmatrix} \left[ \text{tonf} \cdot \frac{s^2}{m} \right]$$

*b) Modos de vibración*

Los modos de vibración del sistema se obtienen resolviendo el problema de autovalores generalizado

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_r = \lambda_r \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_r, \quad \lambda_r = \omega_r^2,$$

donde  $\omega_r$  es la frecuencia circular del modo  $r$  y  $\boldsymbol{\phi}_r$  su vector propio asociado. Los periodos modales se calculan como

$$T_r = \frac{2\pi}{\omega_r}.$$

## Ejemplo de un edificio de 5 niveles (Solución):

Frecuencias circulares y periodos:

$$\omega_r = \begin{bmatrix} 4,141 \\ 13,838 \\ 26,599 \\ 39,313 \end{bmatrix} \text{ [rad/s]}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1,517 \\ 0,454 \\ 0,236 \\ 0,160 \end{bmatrix} \text{ [s]}$$

Formas modales:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0,148 & 0,448 & -0,673 & 0,570 \\ 0,380 & 0,662 & -0,023 & -0,646 \\ 0,579 & 0,158 & 0,639 & 0,480 \\ 0,706 & -0,580 & -0,371 & -0,166 \end{bmatrix}$$

Las formas modales se normalizan respecto al último nivel, es decir,  $\Phi_r^{\text{norm}} = \Phi_r / \Phi_{4r}$ .

$$\Phi_n = \begin{bmatrix} 0,209 & -0,772 & 1,813 & -3,431 \\ 0,538 & -1,142 & 0,061 & 3,887 \\ 0,820 & -0,273 & -1,722 & -2,893 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La Figura 13 muestra las formas modales normalizadas.





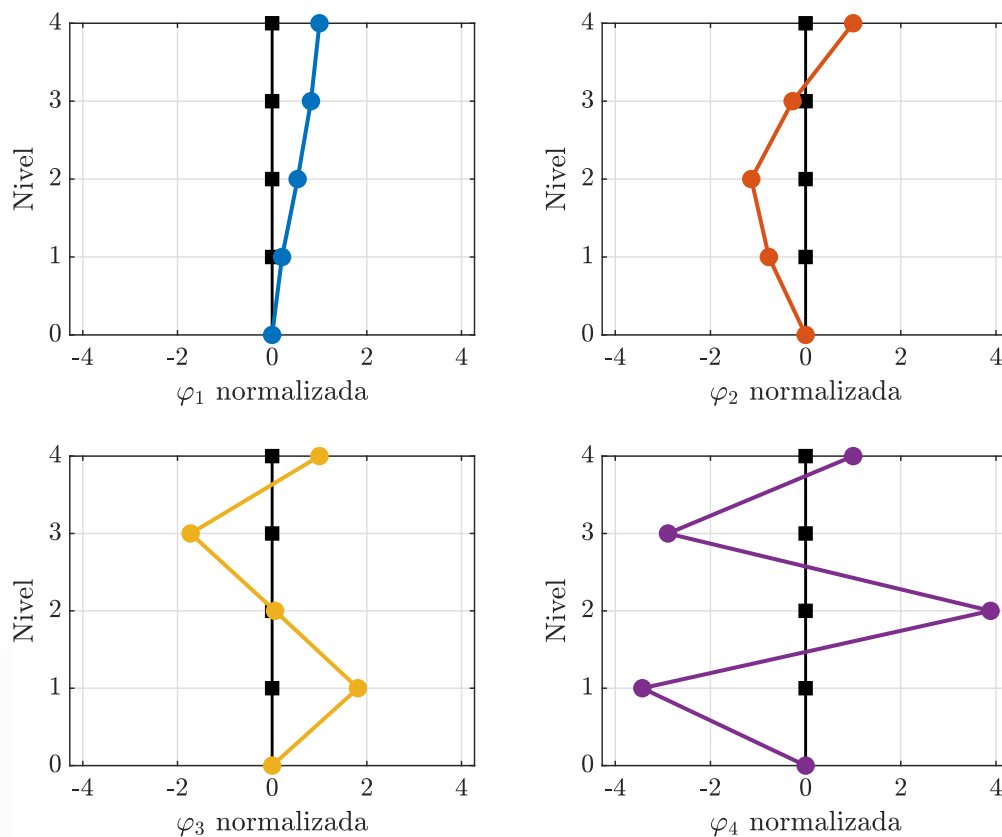


Figura 13: Formas modales normalizadas al piso 4.

**Ejemplo de un edificio de 5 niveles (Solución):****Propiedades modales: masas y factores de participación**

Dadas las formas modales normalizadas al último nivel  $\Phi_n = [\phi_{n,1} \ \phi_{n,2} \ \dots \ \phi_{n,n}]$  y la matriz de masas  $\mathbf{M}$ , las principales cantidades modales se definen como:

- **Masa generalizada del modo  $i$ :**

$$M_i^* = \phi_{n,i}^T \mathbf{M} \phi_{n,i}.$$

Representa la inercia equivalente asociada al movimiento en la coordenada modal  $q_i(t)$ .

- **Masa participante (o fuerza generalizada estática) del modo  $i$ :**

$$L_{n,i} = \phi_{n,i}^T \mathbf{M} \mathbf{r}.$$

Es la proyección del patrón de carga sísmica  $\mathbf{r}$  en la forma modal  $i$ .

■ **Factor de participación modal del modo  $i$ :**

$$\Gamma_i = \frac{L_{n,i}}{M_i^*}.$$

Mide qué tan “eficiente” es el modo  $i$  para excitarse bajo una aceleración uniforme de base.

■ **Masa modal efectiva del modo  $i$ :**

$$m_{e,i} = \Gamma_i^2 M_i^* = \frac{L_{n,i}^2}{M_i^*}.$$

Corresponde a la masa que realmente participa en la respuesta a lo largo del modo  $i$ .

■ **Masa total del sistema:**

$$M_{\text{total}} = \sum_{i=1}^n m_{e,i}.$$

■ **Razón de masa efectiva del modo  $i$ :**

$$r_{m,i} = \frac{m_{e,i}}{M_{\text{total}}}.$$

Indica el porcentaje de la masa total que participa a través del modo  $i$ .

En la Tabla 1 se resumen las propiedades modales obtenidas para los cuatro primeros modos, incluyendo las masas generalizadas, masas participantes, factores de participación, masas efectivas y la contribución relativa de masa de cada modo.

| Modo $i$           | $M_i^*$<br>[tnf s <sup>2</sup> /m] | $L_{n,i}$<br>[tnf s <sup>2</sup> /m] | $\Gamma_i$<br>[–] | $m_{e,i}$<br>[tnf s <sup>2</sup> /m] | $r_{m,i}$<br>[–] |
|--------------------|------------------------------------|--------------------------------------|-------------------|--------------------------------------|------------------|
| 1                  | 122.741                            | 157.102                              | 1.280             | 201.083                              | 0.822            |
| 2                  | 182.008                            | -72.621                              | -0.399            | 28.976                               | 0.118            |
| 3                  | 444.050                            | 70.475                               | 0.159             | 11.185                               | 0.046            |
| 4                  | 2217.648                           | -87.947                              | -0.040            | 3.488                                | 0.014            |
| $M_{\text{total}}$ |                                    |                                      |                   | 244.732                              | 1.000            |

Tabla 1: Resumen de propiedades modales generalizadas y participación de masa.

Se puede apreciar que la masa participativa de los modos superiores (2, 3 y 4) es 17 %.

## Ejemplo de un edificio de 5 niveles (Solución):

## c) Análisis de respuesta en el tiempo:

Se emplea el registro de aceleraciones de la estación LIMA 1974 componente EW, el intervalo de muestreo medio es  $\Delta t \approx 0.02$  s.

En primer lugar se integra la señal sin corregir para obtener las velocidades y desplazamientos,

$$v_{\text{unc}}(t) = \int \ddot{u}_g(t) dt, \quad u_{\text{unc}}(t) = \int v_{\text{unc}}(t) dt, \quad (6)$$

expresados en **cm/s** y **cm** respectivamente. Posteriormente se aplica una corrección instrumental y de deriva, que combina un filtrado de alta y baja frecuencia y un ajuste polinómico al desplazamiento. La señal corregida se denota  $\ddot{u}_g^{\text{corr}}(t)$ .

Las Figuras 14 y 15 muestran, respectivamente, el registro sin corregir y el registro corregido de aceleración, velocidad y desplazamiento.

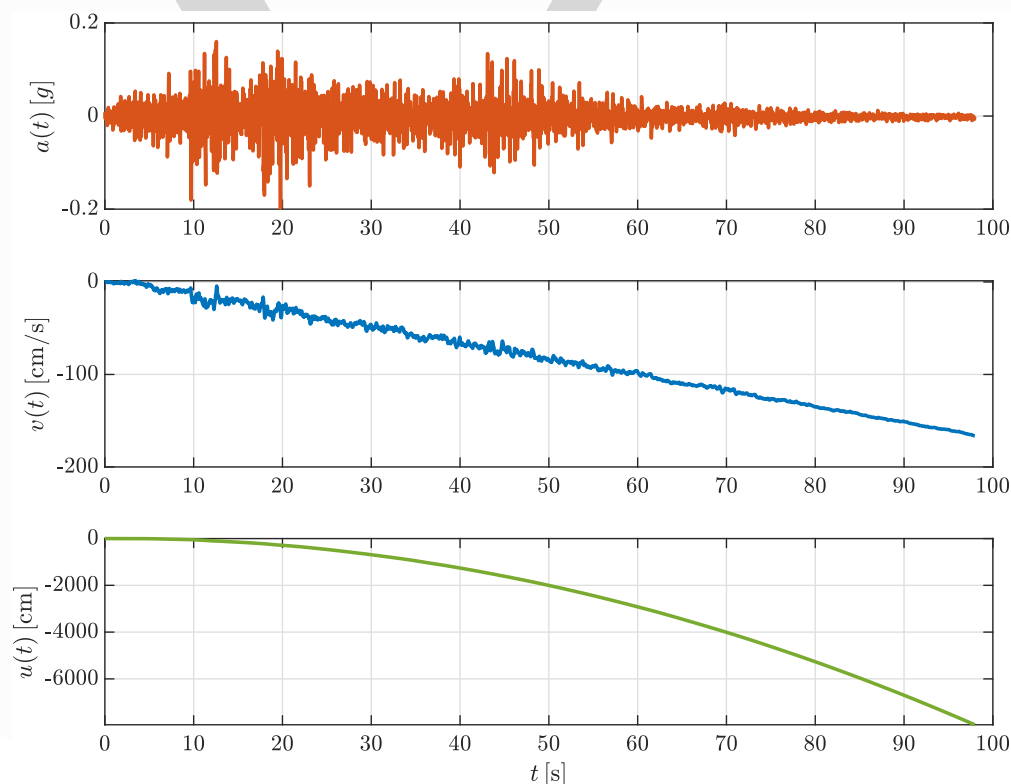


Figura 14: Registro LIMA 1974 EW sin corregir: aceleración, velocidad y desplazamiento.

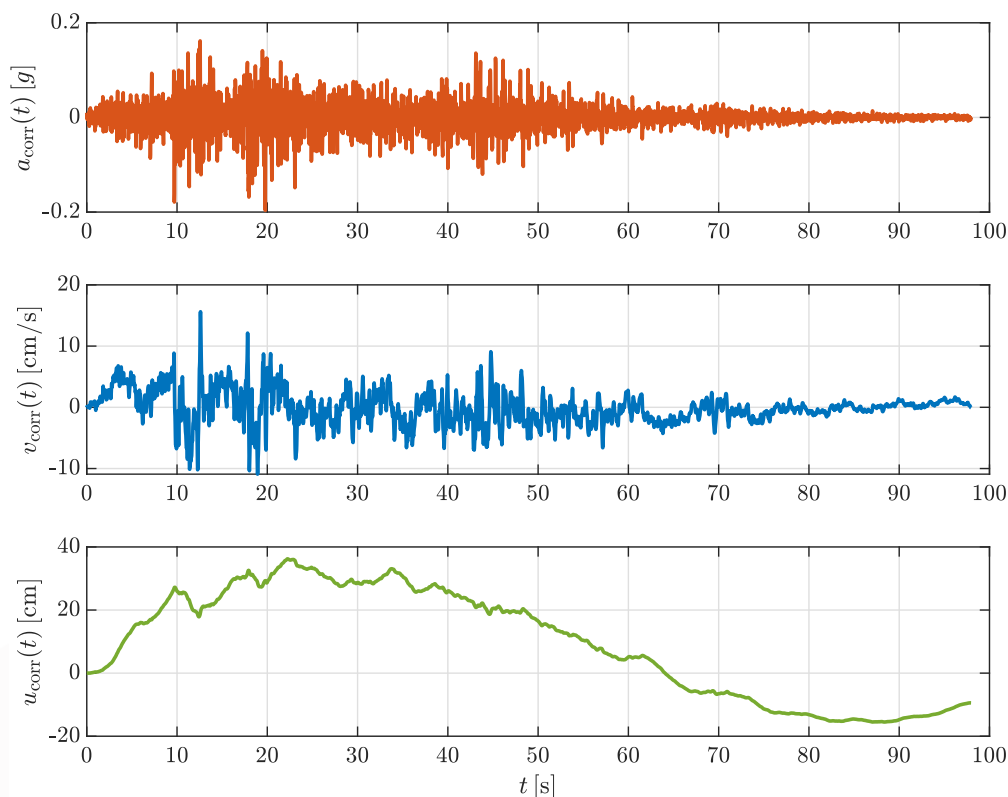


Figura 15: Registro LIMA 1974 EW corregido: aceleración, velocidad y desplazamiento.

#### Ejemplo de un edificio de 5 niveles (Solución):

La respuesta de la estructura ante una aceleración de base  $\ddot{u}_g(t)$  se modela mediante el sistema matricial

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = -\mathbf{M} \mathbf{r} \ddot{u}_g(t),$$

Se asume amortiguamiento un modal:  $\xi_r = 5\%$ . Proyectando en coordenadas modales  $\mathbf{u}(t) = \sum_r \boldsymbol{\phi}_r q_r(t)$ , cada modo verifica la ecuación SDOF

$$\ddot{q}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r = -\Gamma_r \ddot{u}_g(t),$$

Las Figuras generadas por el análisis contienen:

- Coordenadas modales de desplazamiento y aceleración  $q_r(t)$  y  $\ddot{q}_r(t)$  (Figura 16) y (Figura 17).
- Desplazamientos relativos y aceleraciones absolutas por piso en el tiempo (Figura 18) y (Figura 19).
- Derivas de entrepiso  $\theta_i(t)$  (Figura 20).
- Fuerzas laterales por piso, cortante basal y momento de volteo (Figuras 21 y 22).

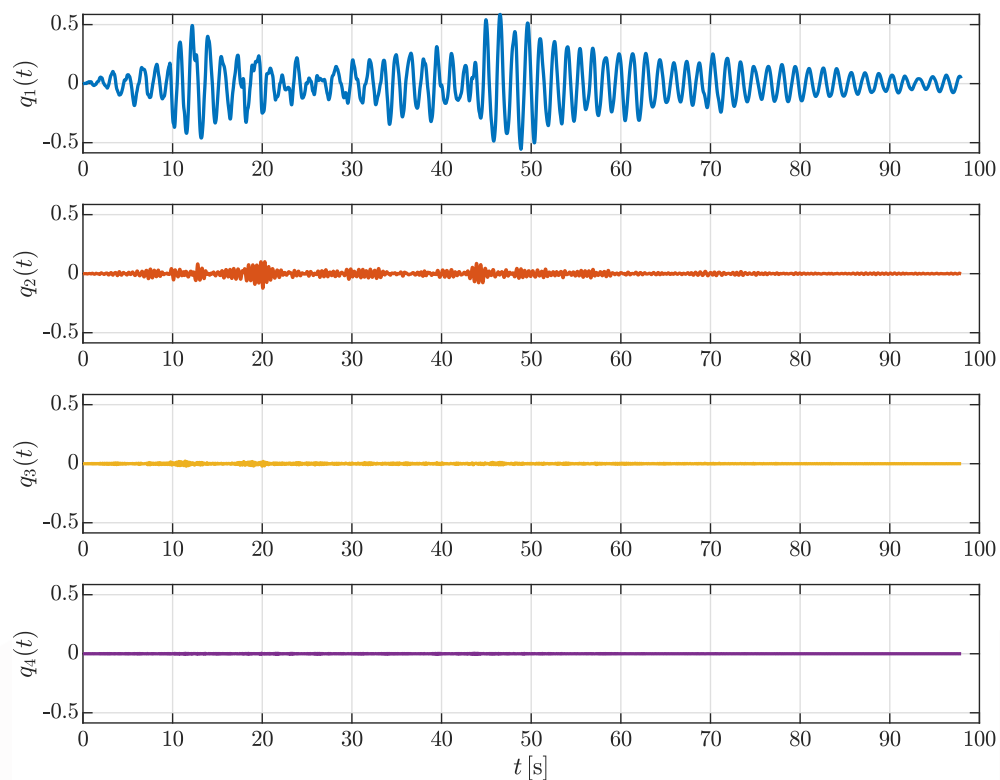


Figura 16: Coordenadas modales de desplazamiento  $q_r(t)$  en el tiempo.

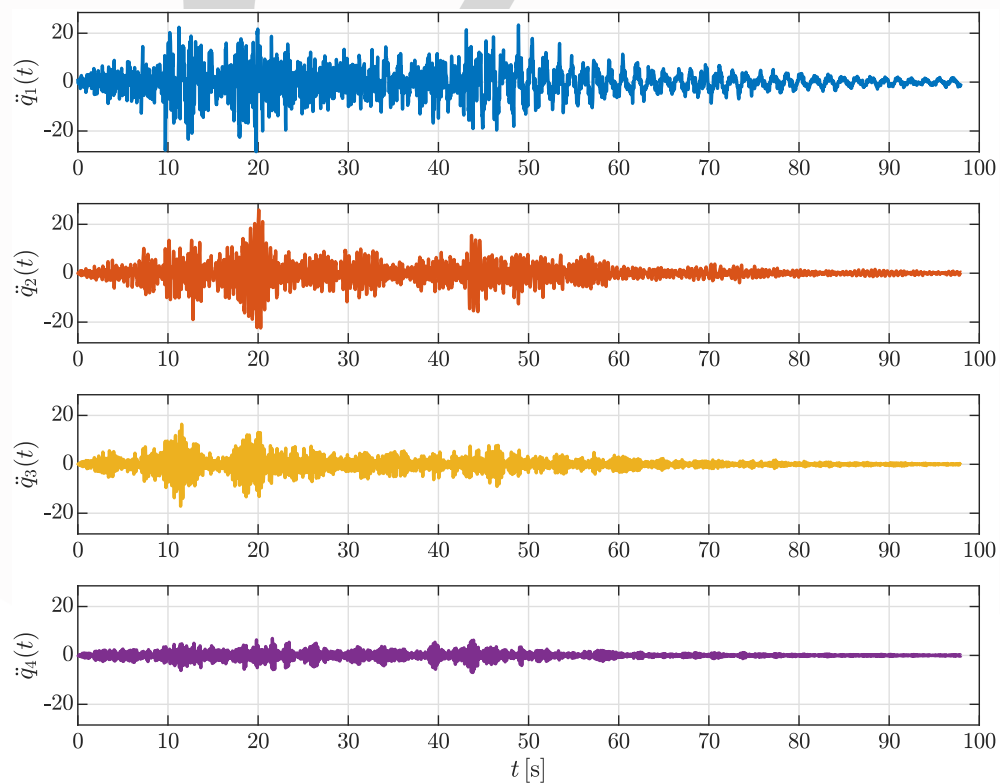


Figura 17: Coordenadas modales de aceleración  $\ddot{q}_r(t)$  en el tiempo.

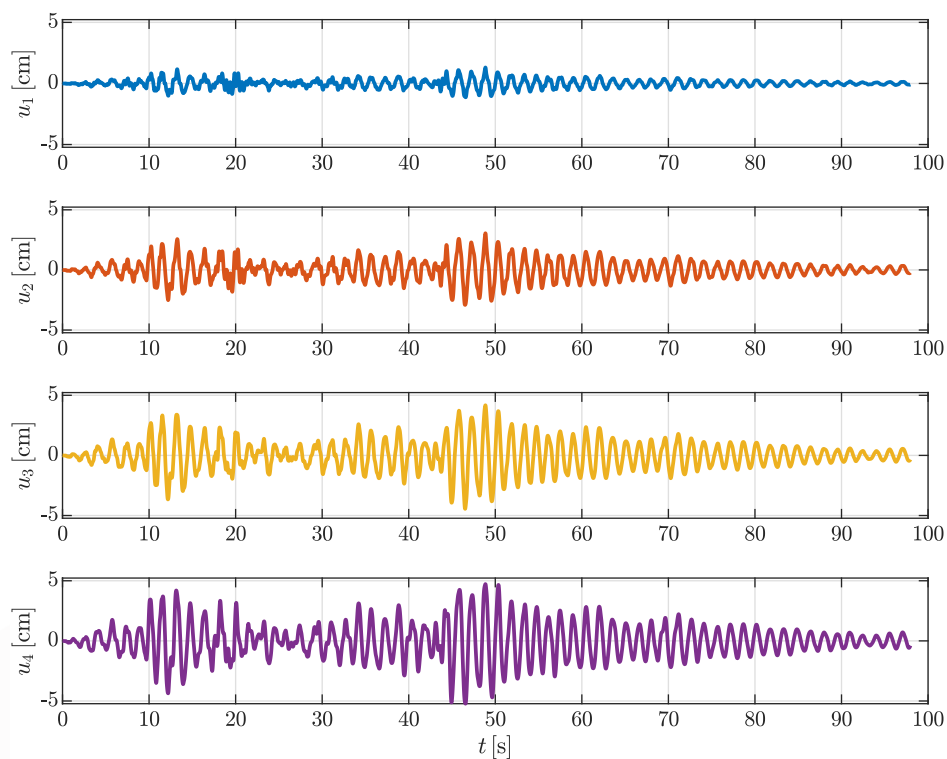


Figura 18: Desplazamientos relativos por piso en el tiempo (análisis tiempo–historia).

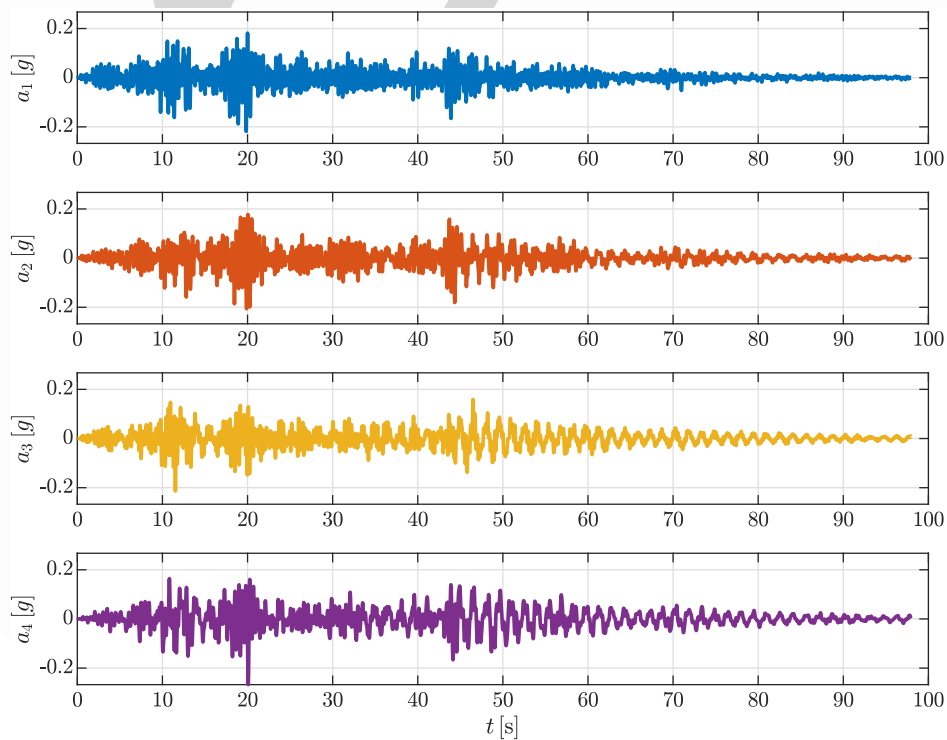


Figura 19: Aceleraciones absolutas por piso en el tiempo (análisis tiempo–historia).

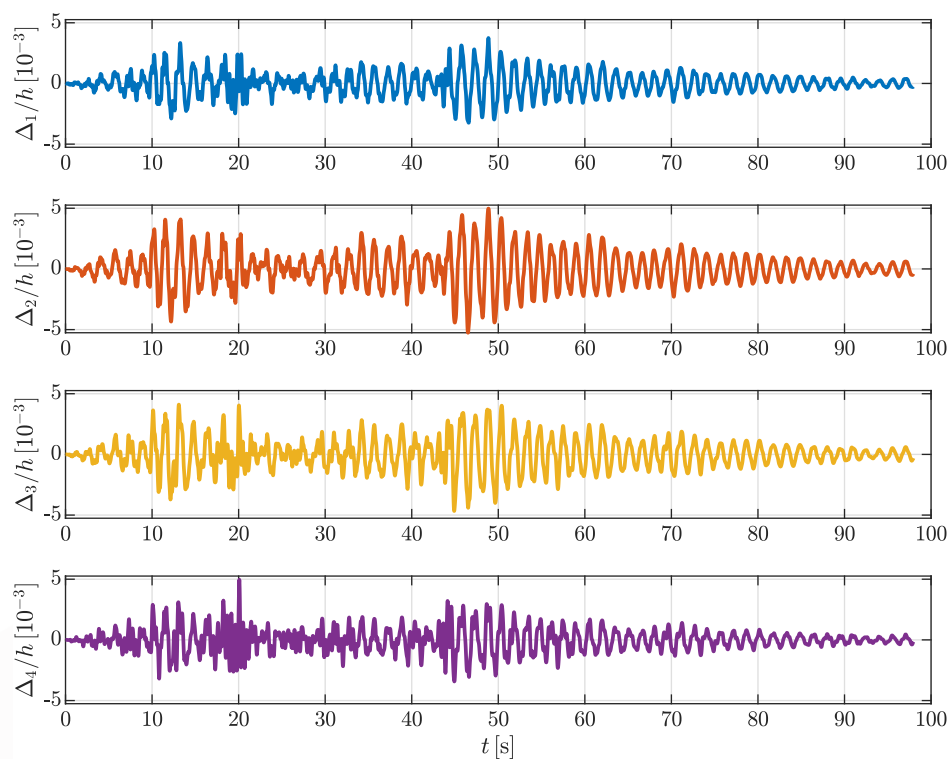


Figura 20: Derivas de entrepiso en el tiempo.

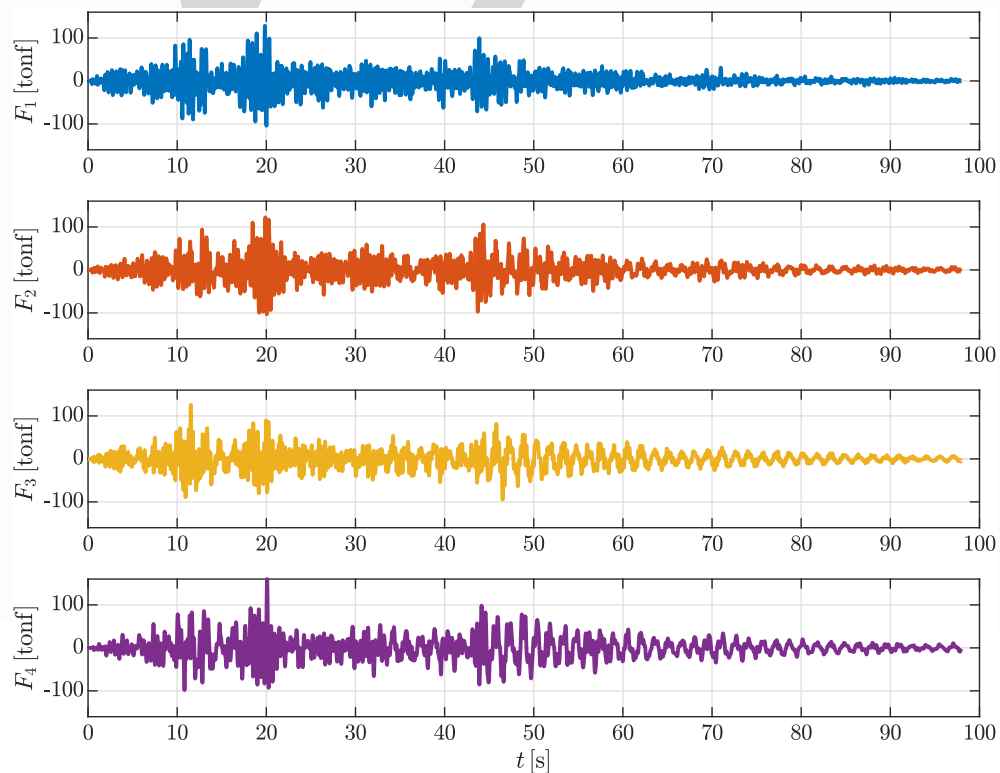


Figura 21: Fuerzas laterales en cada piso en el tiempo.

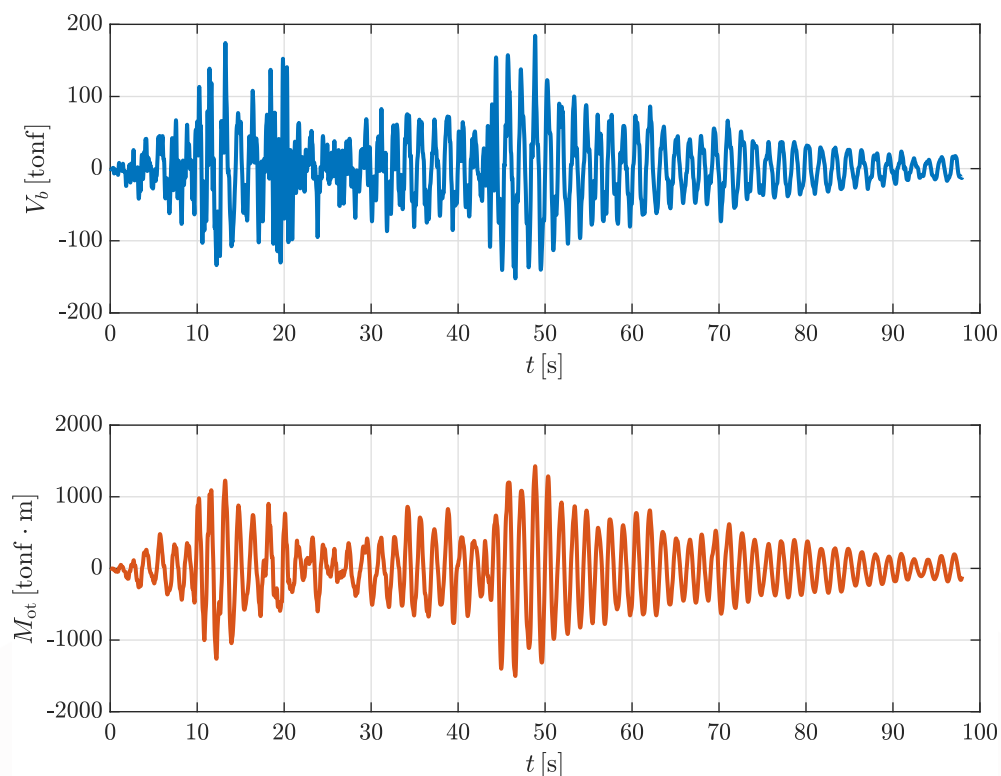


Figura 22: Cortante basal y momento de volteo en el tiempo.

La Tabla 2 resume las respuestas máximas obtenidas del análisis tiempo–historia bajo el registro LIMA 1974 EW.

Tabla 2: Respuesta máxima en el tiempo (LIMA 1974 EW).

| Piso | $u_{\text{máx}}$ [cm] | $a_{\text{máx}}$ [g] | $\theta_{\text{máx}}$ [-] | $F_{\text{lat,max}}$ [tonf] |
|------|-----------------------|----------------------|---------------------------|-----------------------------|
| 1    | 1.3114                | 0.21821              | 0.0037469                 | 128.28                      |
| 2    | 3.0523                | 0.20561              | 0.0052591                 | 122.27                      |
| 3    | 4.4458                | 0.21359              | 0.0046648                 | 125.60                      |
| 4    | 5.2251                | 0.26725              | 0.0049582                 | 160.12                      |

**Cortante basal máxima:**  $V_{b,\text{máx}} = 184,119$  tonf.

**Momento de volteo máximo:**  $M_{\text{ot,máx}} = 1501,725$  tonf · m.



## Ejemplo de un edificio de 5 niveles (Solución):

## d) Espectros de respuesta y análisis de superposición modal

Con la aceleración de base corregida  $\ddot{u}_g^{\text{corr}}(t)$  se calculan los espectros de desplazamiento y aceleración elásticos para un amortiguamiento  $\xi = 5\%$ . Para cada período de oscilación  $T_n$  en el rango  $T \in [0,01, 4]$  s se integra el sistema SDOF:

$$m\ddot{u}_{\text{rel}} + 2\xi\omega_n m\dot{u}_{\text{rel}} + \omega_n^2 m u_{\text{rel}} = -m \ddot{u}_g^{\text{corr}}(t), \quad (7)$$

donde  $\omega_n = 2\pi/T_n$ . La integración se realiza con el método de Newmark- $\beta$  con aceleración promedio ( $\beta = \frac{1}{4}$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$ ). Los valores máximos de desplazamiento relativo y aceleración absoluta definen los espectros de respuesta:

$$S_d(T_n) = \max_t |u_{\text{rel}}(t)|, \quad S_a(T_n) = \frac{\max_t |\ddot{u}_{\text{rel}}(t) + \ddot{u}_g^{\text{corr}}(t)|}{g}. \quad (8)$$

La Figura 23 presenta los espectros de desplazamiento y aceleración junto con los puntos correspondientes a los períodos modales del pórtico. Los valores espectrales en dichos períodos se resumen en la Tabla 3.

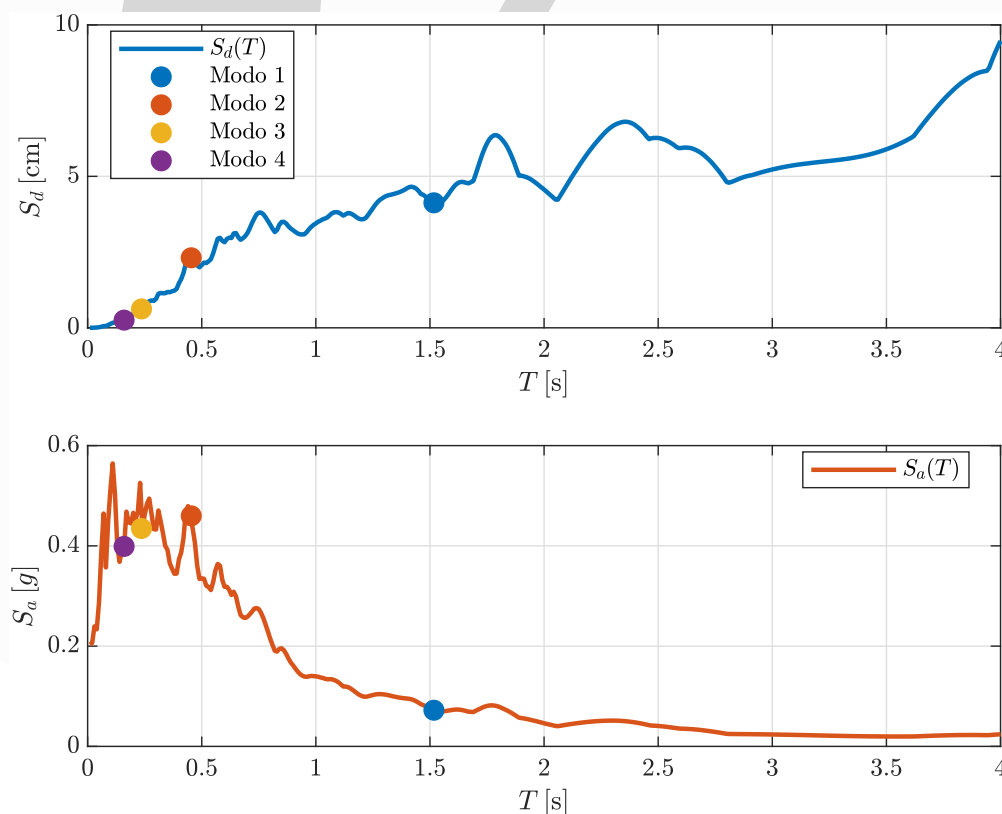


Figura 23: Espectros de desplazamiento y aceleración para LIMA 1974 EW y puntos en los períodos modales.

Tabla 3: Respuestas espectrales en los períodos modales (LIMA 1974 EW).

| Modo | $T_r$ [s] | $S_d(T_r)$ [cm] | $S_a(T_r)$ [g] |
|------|-----------|-----------------|----------------|
| 1    | 1.5172    | 4.126           | 0.072          |
| 2    | 0.4540    | 2.311           | 0.460          |
| 3    | 0.2362    | 0.623           | 0.435          |
| 4    | 0.1598    | 0.253           | 0.399          |

**Ejemplo de un edificio de 5 niveles (Solución):**

Para cada modo  $r$  se asume que el sistema SDOF equivalente está excitado por el mismo movimiento de base. La deformación modal máxima de piso se aproxima mediante

$$\mathbf{u}_r^{\max} = \boldsymbol{\phi}_r \Gamma_r S_d(T_r),$$

$$\mathbf{a}_r^{\max} = \boldsymbol{\phi}_r \Gamma_r S_a(T_r),$$

mientras que las derivas, fuerzas laterales, cortante basal y momento de volteo para cada modo se calculan con las mismas expresiones que en el análisis tiempo–historia.

Para combinar los aportes modales se utiliza el criterio de combinación cuadrática completa (*Complete Quadratic Combination*, CQC). Para un amortiguamiento uniforme  $\xi$  la correlación modal entre los modos  $i$  y  $j$  se estima como

$$\rho_{ij} = \frac{4\xi^2(1 + \beta_{ij})\beta_{ij}}{(1 - \beta_{ij}^2)^2 + 4\xi^2\beta_{ij}(1 + \beta_{ij})^2}, \quad \beta_{ij} = \frac{\omega_j}{\omega_i},$$

con  $\rho_{ii} = 1$ . El valor combinado de una respuesta escalar  $R$  (p.ej. desplazamiento, fuerza, cortante) se obtiene como

$$R_{\text{CQC}} = \sqrt{\sum_i \sum_j R_i \rho_{ij} R_j}.$$

Para el edificio en estudio se obtuvieron los siguientes valores numéricos:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0,299 & 0,156 & 0,105 \\ 3,342 & 1 & 0,520 & 0,352 \\ 6,424 & 1,922 & 1 & 0,677 \\ 9,495 & 2,841 & 1,478 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & 0,009 & 0,005 & 0,004 \\ 0,009 & 1 & 0,025 & 0,011 \\ 0,005 & 0,025 & 1 & 0,063 \\ 0,004 & 0,011 & 0,063 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando esta formulación a las respuestas máximas de cada modo se obtienen los perfiles CQC de desplazamientos, derivas, aceleraciones y fuerzas laterales. La Figura 24 muestra los resultados en altura.

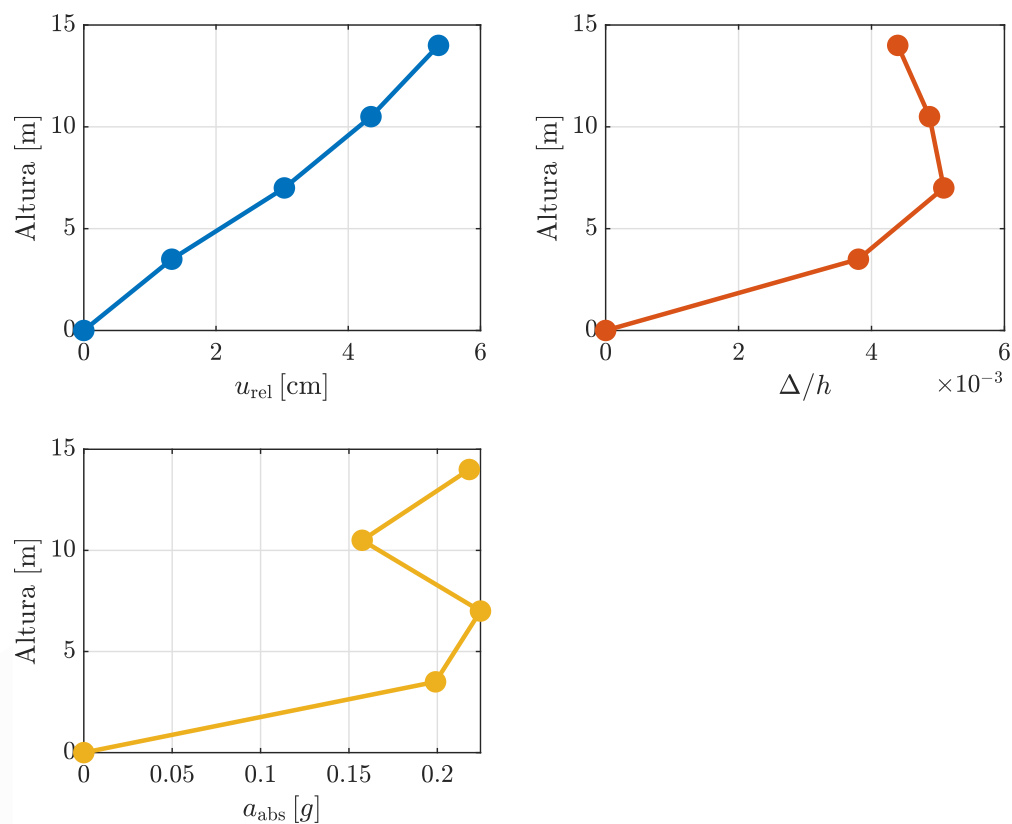


Figura 24: Perfiles CQC en altura de desplazamientos relativos, derivas y aceleraciones.

Tabla 4: Respuesta máxima modal-espectral (CQC) por piso.

| Piso | $u_{CQC}$ [cm] | $\theta_{CQC}$ [-] | $a_{CQC}$ [g] | $F_{CQC}$ [tonf] |
|------|----------------|--------------------|---------------|------------------|
| 1    | 1.331          | 0.0038028          | 0.19897       | 119.93           |
| 2    | 3.0339         | 0.0050874          | 0.22440       | 132.43           |
| 3    | 4.3436         | 0.0048727          | 0.15748       | 96.19            |
| 4    | 5.3651         | 0.0043947          | 0.21808       | 129.59           |

**Ejemplo de un edificio de 5 niveles (Solución):**
*e) Comparación de resultados*

La Figura 25 muestra la comparación en altura de los desplazamientos máximos obtenidos mediante el análisis tiempo–historia (TH) y la combinación modal CQC aplicada a la respuesta espectral. Se observa que ambas curvas prácticamente coinciden para todos los niveles.

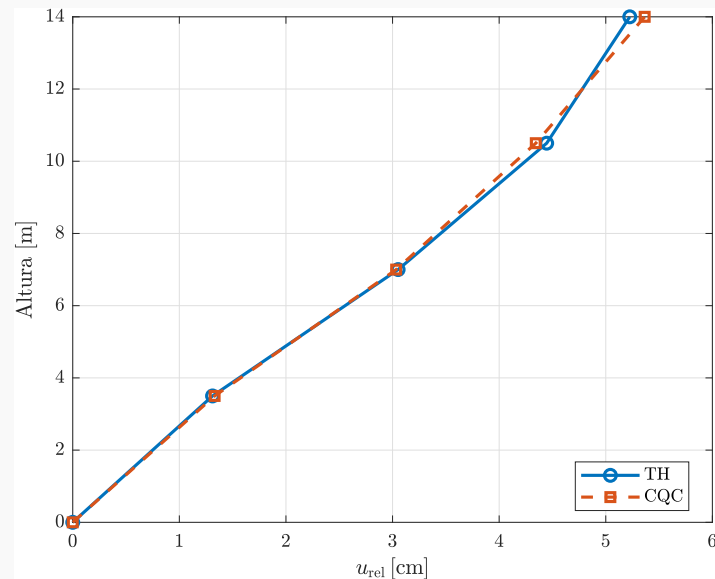


Figura 25: Comparación en altura de desplazamientos máximos TH vs CQC.

La Tabla 5 resume los desplazamientos máximos obtenidos por cada método y la variación porcentual asociada. Las diferencias oscilan entre  $-2,30\%$  y  $+2,68\%$ , valores completamente aceptables para un sistema con múltiples modos de vibración. Este resultado valida la consistencia entre el análisis espectral y el análisis dinámico tiempo–historia.

Tabla 5: Comparación de desplazamientos máximos TH vs CQC.

| Piso | $u_{TH}$ [cm] | $u_{CQC}$ [cm] | $\Delta u$ [%] |
|------|---------------|----------------|----------------|
| 1    | 1.3114        | 1.331          | 1.4912         |
| 2    | 3.0523        | 3.0339         | -0.6046        |
| 3    | 4.4458        | 4.3436         | -2.2988        |
| 4    | 5.2251        | 5.3651         | 2.6776         |

**Ejemplo de un edificio de 5 niveles (Solución):**

La Tabla 6 muestra la comparación de las derivas máximas obtenidas mediante el análisis tiempo–historia (TH) y la combinación modal CQC. Las discrepancias porcentuales se encuentran entre  $-11,36\%$  y  $+4,46\%$ , valores que son coherentes con la sensibilidad de la deriva respecto a la contribución de modos superiores. Aun así, la tendencia global de ambas respuestas es muy similar, lo cual confirma la consistencia entre los dos enfoques de análisis dinámico.

Tabla 6: Comparación de derivas máximas TH vs CQC.

| Piso | $\theta_{TH}$ [-] | $\theta_{CQC}$ [-] | $\Delta\theta$ [%] |
|------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 1    | 0.0037469         | 0.0038028          | 1.4912             |
| 2    | 0.0052591         | 0.0050874          | -3.2650            |
| 3    | 0.0046648         | 0.0048727          | 4.4553             |
| 4    | 0.0049582         | 0.0043947          | -11.365            |

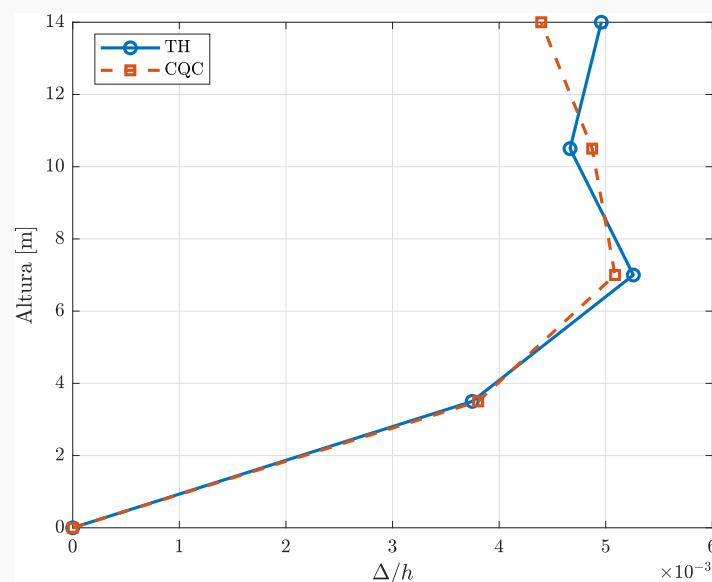


Figura 26: Comparación en altura de derivas máximas TH vs CQC.

**Ejemplo de un edificio de 5 niveles (Solución):**

La Tabla 7 presenta la comparación de las aceleraciones absolutas máximas obtenidas mediante el análisis tiempo–historia (TH) y la combinación modal CQC. A diferencia de los desplazamientos y las derivas, las aceleraciones suelen presentar mayores discrepancias entre métodos debido a la sensibilidad a los modos superiores y al contenido de alta frecuencia del registro sísmico. En este caso, las variaciones oscilan entre  $-26,27\%$  y  $+9,14\%$ , valores coherentes con lo reportado en la literatura. Aun así, la tendencia global en altura se mantiene, lo cual confirma la consistencia general de ambos enfoques de análisis dinámico.

Tabla 7: Comparación de aceleraciones absolutas máximas TH vs CQC.

| Piso | $a_{TH}$ [g] | $a_{CQC}$ [g] | $\Delta a$ [%] |
|------|--------------|---------------|----------------|
| 1    | 0.21821      | 0.19897       | -8.8159        |
| 2    | 0.20561      | 0.22440       | 9.1379         |
| 3    | 0.21359      | 0.15748       | -26.2660       |
| 4    | 0.26725      | 0.21808       | -18.4000       |

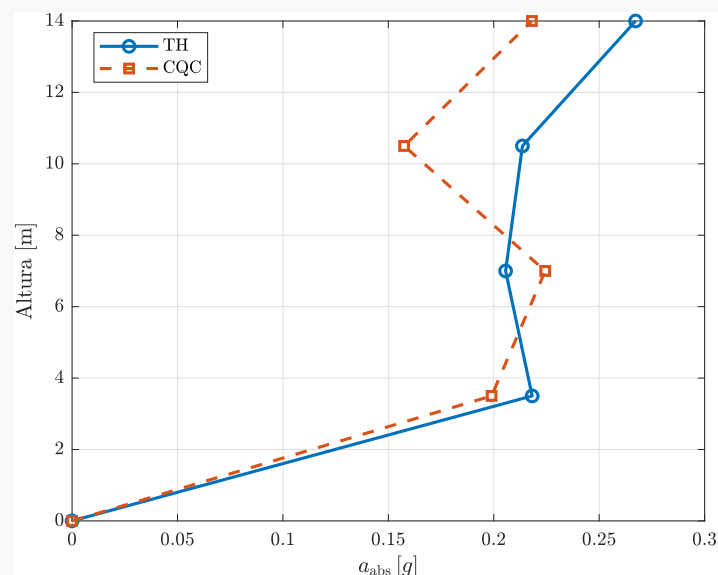


Figura 27: Comparación en altura de aceleraciones máximas TH vs CQC.

**Ejemplo de un edificio de 5 niveles (Solución):**

Para el caso de cortantes de piso y momento volcante se observa que, para los niveles inferiores, las diferencias entre el análisis tiempo–historia y el espectral modal con combinación CQC son reducidas: el momento de volteo en la base difiere menos del 1 %, y las cortantes de los pisos 1–3 presentan variaciones de orden  $\pm(3-8)$ , %. En el último piso las discrepancias aumentan (del orden del 19 %), lo cual es esperable porque las respuestas locales en la parte superior son más sensibles a la forma modal dominante y a la forma de combinar los modos. En conjunto, la comparación indica que el modelo modal con combinación CQC reproduce adecuadamente la distribución global de cortantes y momentos obtenida con el análisis tiempo–historia.

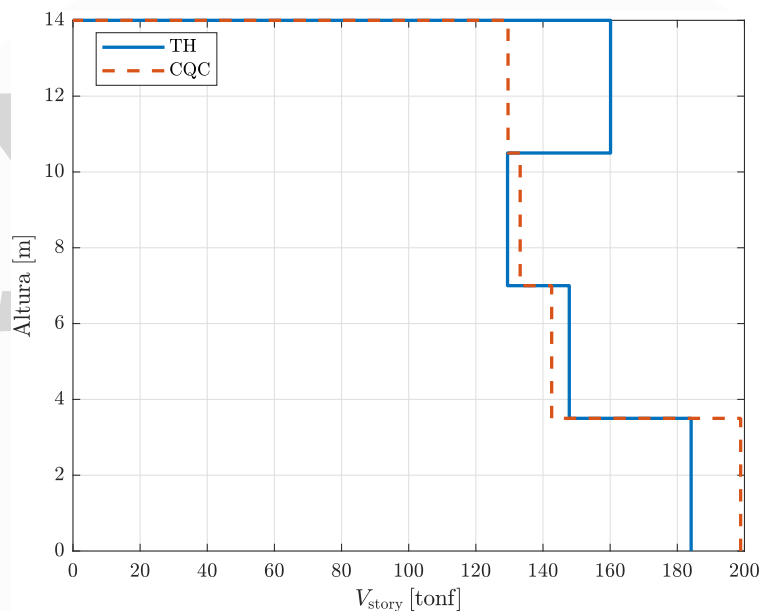


Figura 28: Comparación de cortantes máximas de entrepiso TH vs CQC.

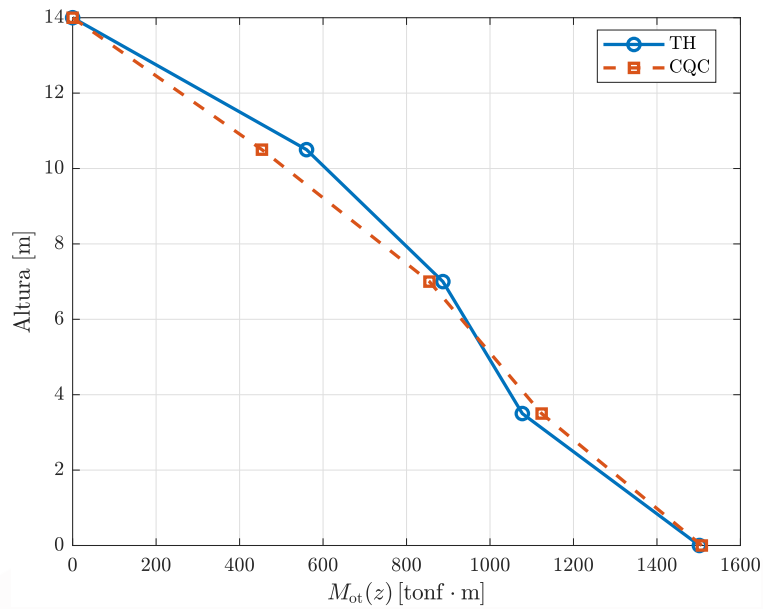


Figura 29: Comparación del diagrama de momento volcamiento TH vs CQC.

## 4. Factores de contribución modal

### Amplitud estática y dinámica en el análisis modal espectral

En la práctica del análisis modal espectral surgen naturalmente las siguientes preguntas fundamentales:

- ¿Cuántos modos son suficientes para obtener una respuesta estructural precisa?
- ¿Cuál es la contribución de un modo específico a los desplazamientos máximos?
- ¿Cuál es la contribución modal a los cortantes máximos?
- ¿Cuál es la contribución modal a los momentos volcantes máximos?

A continuación se presentan los conceptos de masa y altura modal efectiva que ayudan a responder estas preguntas:



### Amplitud estática y dinámica en el análisis modal espectral

Recordando la ecuación característica asociada al modo  $n$  y su respuesta modal,

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_n, \quad \mathbf{u}_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n q_n(t),$$

la historia de fuerzas elásticas asociada a dicho modo se expresa como

$$\mathbf{f}_n(t) = \mathbf{K}\mathbf{u}_n(t) = \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_n \omega_n^2 q_n(t).$$

Para excitación en la base, la coordenada modal puede escribirse como

$$q_n(t) = \Gamma_n D_n(t),$$

donde  $\Gamma_n$  es el coeficiente de participación modal y  $D_n(t)$  es el desplazamiento modal equivalente. Sustituyendo,

$$\mathbf{f}_n(t) = \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_n \omega_n^2 \Gamma_n D_n(t) = s_n \omega_n^2 D_n(t) = s_n A_n(t),$$

siendo

$$s_n = \Gamma_n \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_n$$

la **componente estática modal** asociada al modo  $n$ , y  $A_n(t) = \omega_n^2 D_n(t)$  la pseudoaceleración modal.

La respuesta estática equivalente total se obtiene como

$$\mathbf{S} = \sum_{n=1}^N s_n,$$

y la contribución relativa del modo  $n$  a una respuesta estructural  $r$  se cuantifica mediante el **factor de contribución modal**

$$\bar{r}_n = \frac{r_n^{\text{st}}}{r^{\text{st}}},$$

donde  $r_n^{\text{st}}$  es la respuesta producida por la fuerza estática modal  $s_n$ .

El factor de contribución asociado a las fuerzas estáticas debe interpretarse únicamente como **una parte de la respuesta total** independiente de la carga, ya que, como se muestra en la figura 30, la contribución final de un modo a la respuesta dinámica depende también del **valor máximo de la coordenada modal**  $D(t)$  dependiente de la excitación. Este **factor de contribución dinámico** es análogo a la **pseudoaceleración espectral** obtenida para cada modo a partir del espectro de diseño definido por los códigos sísmicos.

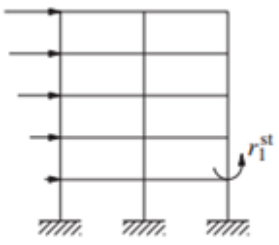
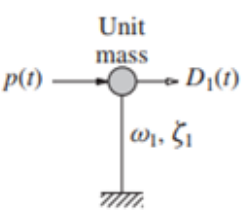
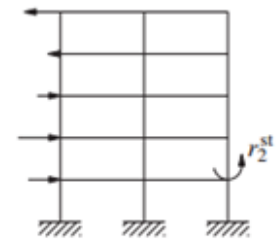
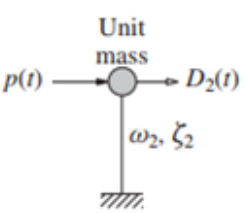
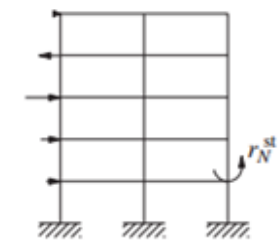
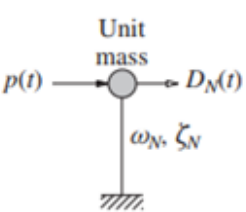
| Mode           | Static Analysis of Structure                                                                                       | Dynamic Analysis of SDF System                                                                       | Modal Contribution to Dynamic Response  |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1              | <p>Forces <math>s_1</math></p>    | <p>Unit mass</p>    | $r_1(t) = r_1^{st} [\omega_1^2 D_1(t)]$ |
| 2              | <p>Forces <math>s_2</math></p>    | <p>Unit mass</p>    | $r_2(t) = r_2^{st} [\omega_2^2 D_2(t)]$ |
| •              | • •                                                                                                                | • •                                                                                                  | • •                                     |
| •              | • •                                                                                                                | • •                                                                                                  | • •                                     |
| •              | • •                                                                                                                | • •                                                                                                  | • •                                     |
| N              | <p>Forces <math>s_N</math></p>  | <p>Unit mass</p>  | $r_N(t) = r_N^{st} [\omega_N^2 D_N(t)]$ |
| Total response |                                                                                                                    |                                                                                                      | $r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t)$            |

Figura 30: Factor de contribución modal. Fuente: Chopra, 2014

#### 4.1. Contribución a la cortante basal y al desplazamiento

##### Contribución a la cortante basal y al desplazamiento

Debido a la relación directa entre las fuerzas estáticas equivalentes y la pseudoaceleración modal, resulta evidente que el vector  $s_n$  asociado al modo  $n$  puede interpretarse como la **masa modal efectiva**  $M_{e,n}$ . Esta magnitud indica cuánta masa estructural se activa en cada modo y, en consecuencia, cuánto contribuye dicho modo a la cortante basal.

Por tanto, la cortante basal asociada al modo  $n$ , debida a las fuerzas estáticas equivalentes  $s_n$ , se expresa como

$$V_{bn}^{st} = \sum_{j=1}^N s_{jn} = \Gamma_n \sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}.$$

La historia temporal de fuerzas modales puede escribirse como el producto de una componente estática y una componente dinámica,

$$f_n(t) = s_n A_n(t),$$

y, de forma análoga, cualquier respuesta modal  $r_n(t)$  puede expresarse como

$$r_n(t) = r_n^{st} A_n(t),$$

donde  $r_n^{st}$  representa la respuesta estática asociada al modo  $n$ .

Como ejemplo, para evaluar la contribución de un modo cualquiera a la respuesta modal de desplazamientos, se tiene

$$u_n^{st} = K^{-1} f_n^{st} = K^{-1} s_n = K^{-1} \Gamma_n M \phi_n.$$

Usando la ecuación característica

$$K \phi_n = \omega_n^2 M \phi_n,$$

se obtiene

$$u_n^{st} = \frac{\Gamma_n}{\omega_n^2} \phi_n.$$

Finalmente, la contribución relativa del modo  $n$  al desplazamiento total se cuantifica mediante el **factor de contribución modal en desplazamientos**,

$$\bar{u}_n = \frac{u_n^{st}}{\sum_{i=1}^N u_i^{st}}.$$

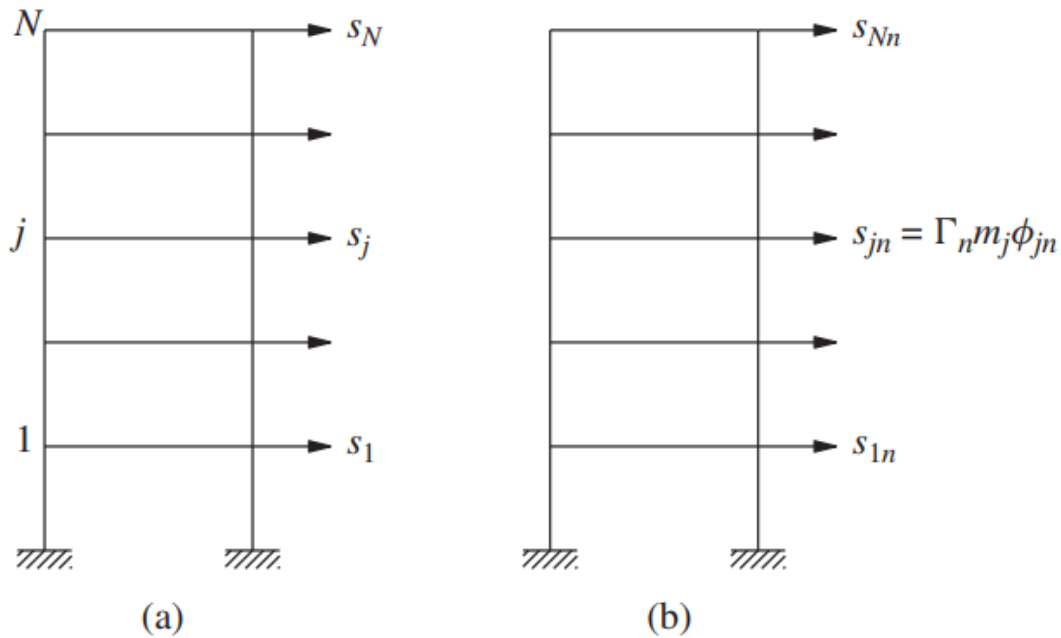


Figura 31: Contribución estática de fuerzas laterales en cada modo. (Fuente: Chopra, 2014)

#### Otra forma de entender la masa efectiva:

La ecuación de movimiento con masa unitaria es:

$$\ddot{D}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{D}_i(t) + \omega_i^2 D_i(t) = -a_s(t)$$

En este nuevo sistema la fuerza en cada modo  $i$  sera:

$$F_i = Ku_i(t)$$

$$F_i = \omega_i^2 M \phi_i q_i(t)$$

$$F_i = \omega_i^2 M \phi_i \Gamma D_i(t)$$

$$F_i = M \phi_i \Gamma S_{a,i}(t)$$

$$F_i = M_e S_{a,i}(t)$$

Donde:

$M_e$ : Masa modal efectiva y  $S_{a,i}(t)$ : Pseudoaceleración

$$M_e = M \phi_i \Gamma = \frac{M \phi_i \phi_i^T M}{\phi_i^T M \phi_i} = \frac{(\sum_{i=1}^n m_i \phi_i)^2}{\sum_{i=1}^n m_i \phi_i^2}$$

### Pseudo-aceleración espectral: por qué es “pseudo” y no aceleración real

En la Norma E.030, el espectro de diseño suele expresarse en términos de **pseudo-aceleración espectral**  $S_a$ . Se denomina *pseudo-aceleración* porque **no corresponde necesariamente al máximo de la aceleración real**  $\ddot{u}(t)$  del oscilador, sino a una **aceleración equivalente** obtenida a partir del **desplazamiento máximo** del sistema.

**Aceleración real vs. pseudo-aceleración** Sea un oscilador de un grado de libertad con período  $T$  (frecuencia circular  $\omega$ ) sometido a un sismo. La **aceleración real** del sistema es:

$$a(t) = \ddot{u}(t) \quad (9)$$

mientras que la **pseudo-aceleración** se define a partir del **desplazamiento espectral** máximo  $S_d$  como:

$$S_a = \omega^2 S_d \quad \text{con} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (10)$$

**Interpretación física para diseño** La pseudo-aceleración  $S_a$  puede interpretarse como la **aceleración constante equivalente** que produciría, en forma “estática”, el mismo desplazamiento máximo dinámico  $S_d$ . Por ello, en términos de fuerzas inerciales equivalentes:

$$F_{eq} = m S_a, \quad (11)$$

lo cual resulta especialmente útil en el **análisis modal-espectral** y en la construcción de **espectros de diseño** empleados por la norma.

**Relación con otros pseudo-espectros** De manera consistente, a partir de  $S_d$  se definen:

$$S_v = \omega S_d \quad (\text{pseudo-velocidad}), \quad S_a = \omega^2 S_d \quad (\text{pseudo-aceleración}). \quad (12)$$

**Comentario práctico** Para amortiguamientos típicos de diseño (por ejemplo, alrededor del 5 %), la pseudo-aceleración  $S_a$  suele aproximar adecuadamente la demanda asociada a fuerzas inerciales máximas, razón por la cual su uso está ampliamente extendido en normas de diseño sismorresistente.

$$\max|\ddot{u}(t)| \approx \omega^2 \max|u(t)| \quad (13)$$

## 4.2. Contribución al momento volcantes en la base

### Contribución al momento volcantes en la base

Por conveniencia, se reescriben algunas magnitudes modales fundamentales. El coeficiente de participación modal puede expresarse como

$$\Gamma_n = \frac{\phi_n^T \mathbf{M} \mathbf{r}}{\phi_n^T \mathbf{M} \phi_n} = \frac{L_n^h}{M_n},$$

donde

$$L_n^h = \sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}, \quad M_n = \sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}^2.$$

El momento volcantes en la base asociado al modo  $n$ , debido a las fuerzas estáticas equivalentes  $s_n$ , se define como

$$M_{bn}^{\text{st}} = \sum_{j=1}^N h_j s_{jn},$$

y sustituyendo  $s_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn}$  resulta

$$M_{bn}^{\text{st}} = \sum_{j=1}^N h_j \Gamma_n m_j \phi_{jn} = \Gamma_n L_n^\theta,$$

donde

$$L_n^\theta = \sum_{j=1}^N h_j m_j \phi_{jn}$$

se denomina **momento estático modal** o **primer momento de masa modal**.

De forma análoga a la cortante basal, el momento volcantes modal puede escribirse como

$$M_{bn}^{\text{st}} \equiv h_{e,n} M_{e,n},$$

donde  $M_{e,n}$  es la masa modal efectiva y

$$h_{e,n} = \frac{M_{bn}^{\text{st}}}{M_{e,n}} = \frac{\Gamma_n L_n^\theta}{M_{e,n}}$$

es la **altura modal efectiva** asociada al modo  $n$ .

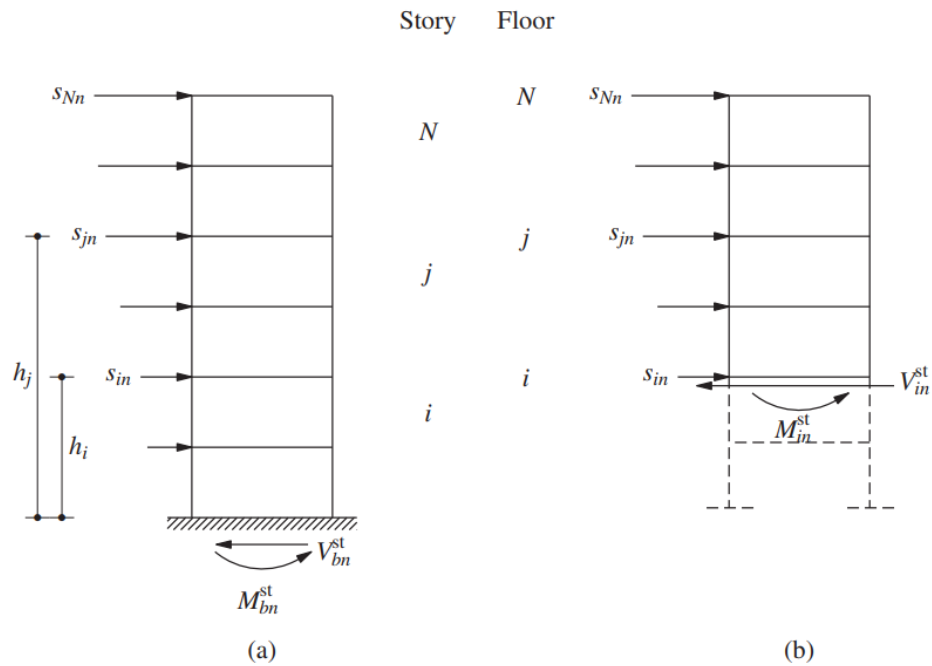


Figura 32: Cortante y momento debido a las fuerzas laterales de cada modo (Fuente: Chopra, 2014)

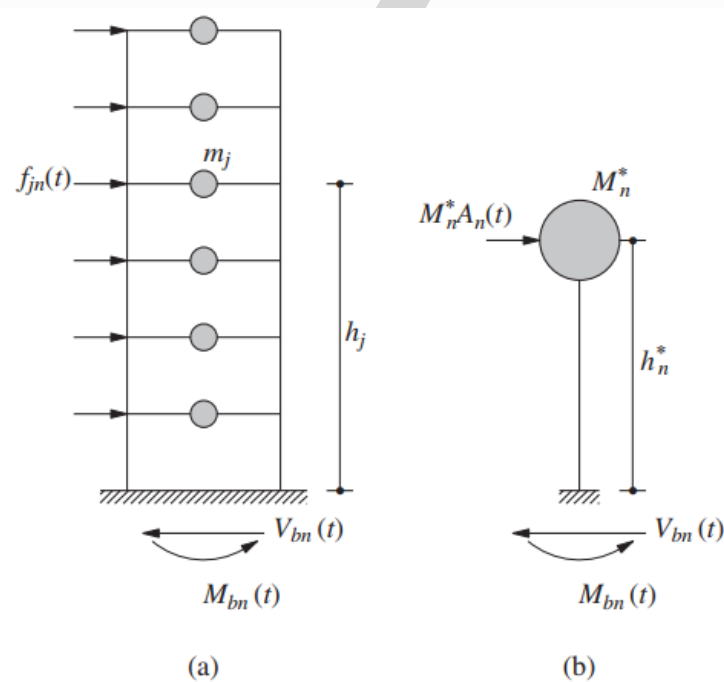


Figura 33: Definición de la altura modal. Fuente: Chopra, 2014.

### Ejemplo de contribución modal al momento en la base:

En el análisis modal espectral, el **momento volcante en la base** puede expresarse como suma de contribuciones modales. Para cada modo  $n$ ,

$$M_{b,n}^{st} = M_{e,n} h_{e,n},$$

donde  $M_{e,n}$  es la **masa modal efectiva** y  $h_{e,n}$  es la **altura modal efectiva**. La contribución porcentual de cada modo se estima normalizando:

$$\%M_{b,n} = \frac{M_{e,n} h_{e,n}}{\sum_{i=1}^N M_{e,i} h_{e,i}} \times 100.$$

Si  $h_{e,n} < 0$ , la contribución del modo  $n$  es **negativa**, lo que indica que dicho modo **disminuye** el momento volcante total (por presentar un patrón modal que genera acciones inerciales opuestas al giro dominante).

**Datos del ejemplo (Chopra, 2014):**  $M_{e,n}$  y  $h_{e,n}$  se toman de la figura 34.

Tabla 8: Contribución modal algebraica al momento volcante en la base

| Modo        | $M_{e,n}$ | $h_{e,n}$ [m] | $M_{e,n} h_{e,n}$ | Contribución (%) |
|-------------|-----------|---------------|-------------------|------------------|
| 1           | 4.398     | 3.51          | 15.437            | 103.0            |
| 2           | 0.436     | -1,20         | -0.523            | -3.5             |
| 3           | 0.121     | 0.76          | 0.092             | 0.6              |
| 4           | 0.037     | -0,59         | -0.022            | -0.1             |
| 5           | 0.008     | 0.52          | 0.004             | 0.0              |
| <b>Suma</b> |           |               | <b>14.988</b>     | <b>100.0</b>     |

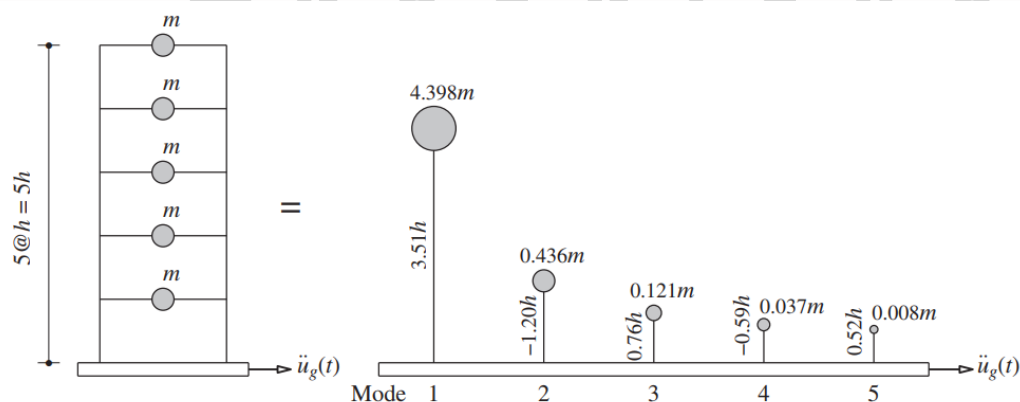


Figure 13.2.5 Effective modal masses and effective modal heights.

Figura 34: Ejemplo de calculo de contribución modal al momento volcante. Fuente: Chopra, 2014.



## Referencias

Chopra, A. (2014). *Dinamica de estructuras*. Pearson.

Clough, R. W., & Joseph, P. (2003). *Dinámica Estructural*. Computers & Structures Inc.

García, L. E. (1988). *Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico*. Universidad de los Andes.

Pique Del Pozo, J., & Scaletti Farina, H. (1990). *Análisis Sísmico de Edificios*. Capítulo de Ingeniería Civil.

